МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Ивановская государственная текстильная академия

**Кафедра теоретической механики
и сопротивления материалов**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

**к выполнению контрольных заданий
по теоретической механике
для студентов заочного факультета
"ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ
СИСТЕМА СИЛ"**

Методические указания по теоретической механике “Произвольная пространственная система сил” рассчитана для студента 2 курса заочного факультета.

Предполагается, что читатель владеет для изучения статики знаниями, имеет развитое пространственное воображение, необходимое для проецирования силы на плоскости и затем на оси координат, а также определения моментов силы относительно них.

Данные МУ помогут студентам в решении первого контрольного задания и в освоении теоретического материала по статике.

Составители: Виктор Георгиевич Анфимов, к.т.н., доцент
Елена Владимировна Горбунова , к.т.н., доцент

Редактор Вадим Иванович Смирнов, профессор, д.т.н.

ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

Если силы, действующие на тело, лежат в пространстве, то такая система сил называется пространственной, и если главный вектор и главный момент системы равны нулю, то система сил уравновешенная.

Следовательно, необходимые и достаточные условия равновесия пространственной системы будут R = 0, M = 0 - в векторной форме.

Так как при равновесии главный момент нравен нулю относительно любого центра приведения, то вместо M_O можно писать M без индекса.

Спроектировав главный вектор R на координатные оси O_X ,Oy , Oz , получим аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил, которые выражаются шестью уравнениями равновесия и

$$\Sigma X_i = 0 \qquad \Sigma M_x = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0 \qquad \Sigma My = 0 \qquad (1)$$
$$\Sigma Zi = 0 \qquad \Sigma Mz = 0$$

и формулируется так: произвольная пространственная система сил находится в равновесии, если сумма проекций сил на каждую из координатных осей и сумма моментов всех сил относительно осей координат равны нулю.

При решении необходимо рассмотреть связи, которые до сих пор не встречались нам.

Подпятник (рис. 1) - это тип опоры не препятствующий повороту тела или какой -либо его детали вокруг своего центра, но препятствующий смещению тела в любом направлении, поэтому для такого типа опоры не известны ни величина реакции , ни образуемые его с координатами осями углы, а известна только точка приложения реакции.

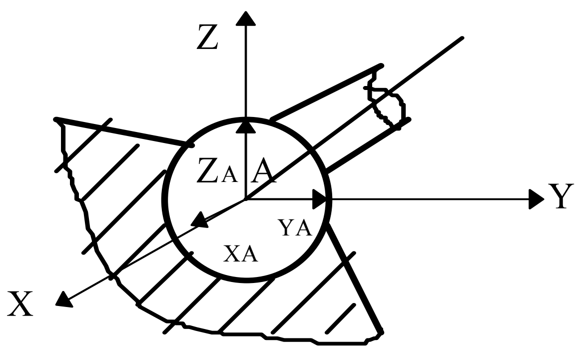

Рис. 1

Такую реакцию можно представить составляющими, направленными в положительных направлениях трех осей координат (отрицательный знак, полученный при решении уравнения равновесия, покажет, что в действительности та или иная составляющая опорной реакции направлена в противоположную выбранному направлению сторону).

В большинстве задач требуется определить не реакцию, а ее составляющие, сама реакция определяется как диагональ прямоугольного параллепипеда, построенного на составляющих X,Y,Z как на сторонах.

$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$.

Направление реакции можно определить по направляющим косинусам

$$Cos(R,x) = x/R,$$
$$Cos(R,y) = y/R, \qquad (2)$$
$$Cos(R,z) = z/R.$$

Подлинник (рис.2) - это цилиндрический шарнир, позволяющий телу или его элементу (например, валу, оси и т.д.) поворачиваться вокруг своей оси, смещаться вдоль нее, но непозволяющему перемещаться в перпендикулярной плоскости к его оси , следовательно, реакция подшипника может быть расположена только в плоскости, перпендикулярной к его оси. Зная в этой плоскости только точку приложения реакции и не зная угла, образуемого его с какой-либо находящейся в этой плоскости осью, представляем реакцию двумя составляющими, направленными в положительные стороны координатных осей, расположенных в этой плоскости. Сама реакция R может быть определена как равнодействующая определенных составляющих Z и Y.

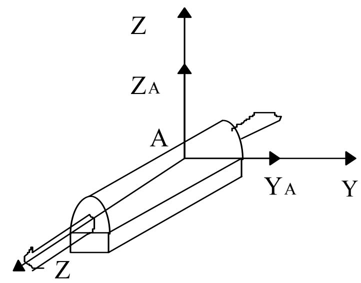

Рис.2

$$R = \sqrt{Y^2 + Z^2}\,. \qquad (3)$$

Направление ее может быть найдено по формулам:

$\cos(R,y) = y/R,$ (4)

$\cos(R,z) = z/R.$

Порядок решения задач

1. Установить, равновесие какого тела нужно рассмотреть, чтобы определить неизвестные величины.
2. Выбрать начало координат и положения координатных осей.
3. Установить, какие активные силы действуют на тело.
4. Освободившись отсвязей, наложенных на рассматриваемую систему, заменить действие связей силами реакций связей.
5.Составить соответствующие уравнения равновесия.
6. Решая уравнения равновесия, определить неизвестные величины. Найдя знаки неизвестных сил, установить их фактические направления.

Пример

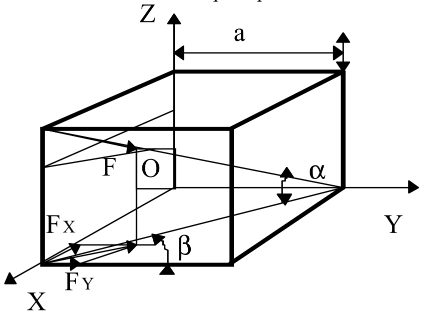

Рис.3

Рассмотрим сначала методику определения проекций силы на оси координат и моментов ее относительно этих осей. Пусть по внутренней диагонали куба (рис.3) действует сила F. Определим проекции силы F на оси координат и моменты ее относительно осей. Чтобы найти проекции силы на ось координат, необходимо применить метод двойного проектирования, который заключается в том, что сначала сила проекцируется на плоскость, включающую данную ось, а затем уже эта проекция проецируется на данную ось. Так, чтобы определить проекцию силы F на ось X, необходимо сначала спроецировать ее на плоскость XoY, а уже затем на ось ординат. В результате получим, что $F_x = -F\cos\alpha\sin\beta$, где $\cos\alpha = a\sqrt{2}/a\sqrt{3} = \sqrt{2}/\sqrt{3}$

$\sin\beta = a/a\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$; $F_x = -F\,\sqrt{2}/\sqrt{3}\;1/\sqrt{2} = -F/\sqrt{3}$.

Знак минус показывает, что направление проекции противоположно положительному направлению оси X. Аналогично, $F_y = F\cos\alpha\cos\beta$, где $\cos\beta =$
$a/a\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$; $F_y = F\,\sqrt{2}/\sqrt{3}\;1/\sqrt{2} = F/\sqrt{3}$.

Проекция силы F на ось Z определяется как $F_z = -F\sin\alpha$, где $\sin\alpha = a/a\sqrt{3}$,
$F_z = -F\,.\,1/\sqrt{3}$.

Итак убеждаемся, что сила направлена на внутренней диагонали куба, то проекция силы на все оси одинаковы.

При определении момента силы относительно оси координат необходимо помнить, что он равен произведению проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси на перпендикуляр, опущенный из точки пересечения оси с плоскостью на линию действия проекции силы. Знак момента будет положительным, если, посмотрев с положительного направления оси координат увидим вращение плоскости под действием проекции против часовой стрелки и, наоборот, отрицательный если это вращение совпадает с вращением стрелки часов.

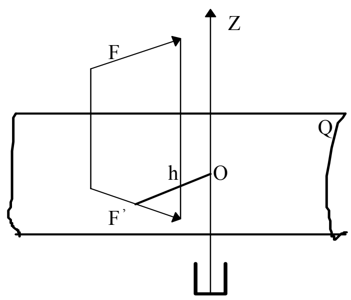

Рис.4

так, момент силы F(рис.4) относительно оси Z будет равен произведению проекции силы F на плоскость Q, перпендикулярную осиZ, на перпендикуляр, опущенный из точки O пересечения оси с этой плоскостью на линию действия проекции силы $F^{'}$. Итак

$M_z = (F) = F^{'} h.$

Знак момента положительный, так как вокруг оси Z плоскость Q под действием проекции $F^{'}$, если смотреть с положительного направления оси Z, вращается против часовой стрелки. Момент силы относительно оси координат будет равен 0, когда сила параллельна этой оси или пересекает ее.

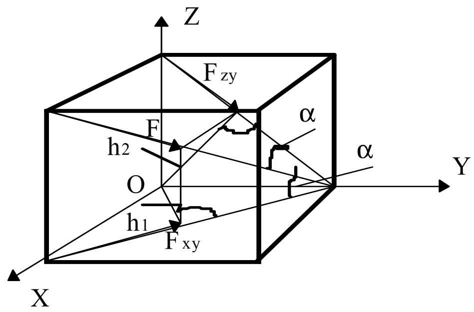

Рис.5

Так, в примере (рис.5) сила F пересекает осьY, следовательно, ее момент относительноY равен нулю. Момент силы F относительно сои X будет произведение проекции силы на плоскость перпендикулярную оси X (плоскость ZoY) на перпендикуляр, опущенный из точки O, пересечения осиX с плоскостью ZoY на линию действия проекции силы на эту плоскость:

$M_x = -F_{zy} h_z$, где $F_{zy} = F \cos\alpha = F \sqrt{2}/\sqrt{3}$, $h_z = a \cos 45^o = a\sqrt{2}/2$,

откуда

$$M_x = - F \sqrt{2}/\sqrt{3}.\ a\sqrt{2}/2 = -Fa/\sqrt{3}.$$

Знак (-) показывает, что плоскость ZoY под действием проекции F_{zy} вокруг оси X вращается по часовой стрелке. Аналогично $M_z = -F_{xy} h_1 = F \sqrt{2}/\sqrt{3}.\ a\sqrt{2}/\sqrt{3} = Fa/\sqrt{3}$.

Учитывая, что

$$M_x = yZ - zY,$$
$$M_y = zX - Yx,$$
$$M_z = xY-yX,$$

где x,y,z - координаты точки приложения силы,

X,Y,Z - проекции силы на соответствующие оси.

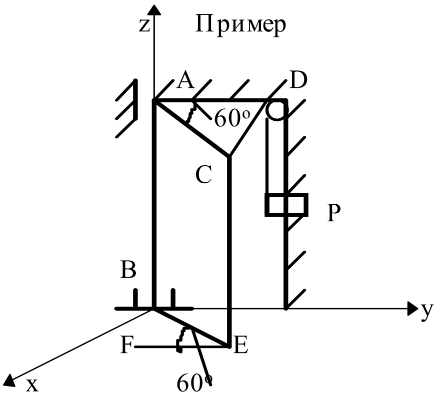

Рис.6

Координаты точки А (a,o,a).
Проекции силы $F_x = -F/\sqrt{3}$, $F_Y = F/\sqrt{3}$, $F_z = -F/\sqrt{3}$.
Подставляя, проверим результаты наших рассуждений:
$M_x = o(-F/\sqrt{3}) - aF/\sqrt{3} = -Fa/\sqrt{3}$,
$M_x = a(-F/\sqrt{3}) + aF/\sqrt{3} = 0$,
$M_z = aF/\sqrt{3} - 0(-F/\sqrt{3}) = Fa/\sqrt{3}$.

Прямоугольная дверь (рис.6), имеющая вертикальную ось вращения АВ, открыта на угол $\angle$ САД = 60° и удерживается в этом положении двумя веревками , из которых одна - СД перекинута через блок Д и натягивается грузом Р = 20 кГ, а другая - EF привязана в точке F пола. Вес двери равен 40 кГ, ее ширина АД = АС = 1 м, высота АВ = 2 м. Определить, пренебрегая трением на блоке, натяжение Т веревки TF, а также реакции цилиндрического шарнира А и подпятника В.

Рассмотрим равновесие двери ВАСЕ (рис.7,а). Приняв за начало координат точку В направим координатные оси согласно рис.7а. Неподвижный блок Д, не изменяя величины груза Р, изменяет его направление, следовательно, в точке С на дверь действует находящаяся в горизонтальной плоскости АСД активная сила Р, направленная по оси веревки СД. Кроме того, к точке О - центру тяжести двери ВАСЕ (геометрическому центру прямоугольника ВАСЕ) приложена вертикальная сила Q- ее вес, а в точках А и В к двери приложены реакции связей.

Раекцию цилиндрического шарнира А представим в виде двух составляющих X_a и Y_a ; реакцию подпятника В превставим в виде трех составляющих $X_{в.}$ $Y_{в.}$
$Z_{в;}$ реакцию Т веревки EF, по величине равную ее натяжению Т, направим по оси веревки от F к Е.

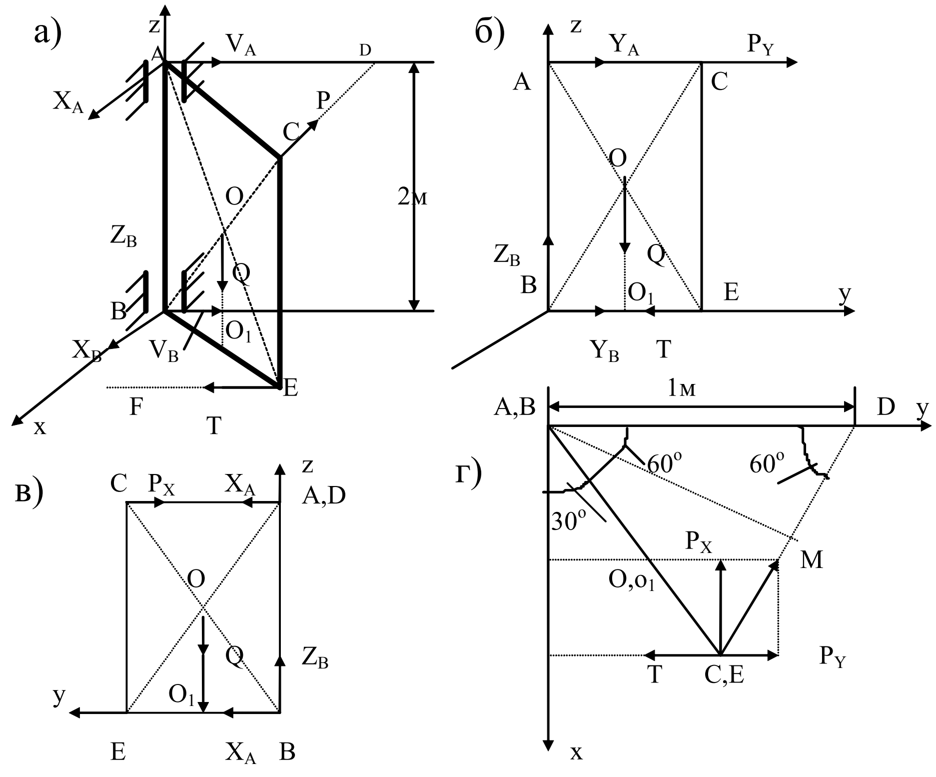

Рис.7

В результате применения принципа освобождения от связей получили пространственную систему сил, для которой можно составить шесть уравнений равновесия (1).

При определении моментов сил относительно осей координат будем пользоваться вспомогательными рисунками (7в, г,б,), представляющими собой проекции двери - вместе с приложенными к ней силами - на плоскости yBz, xBz, xBy.

Составим таблицу проекций сил на оось координат и моментов сил относительно осей.

Сила	X кг	Y кг	Z кг	M_x кгм	M_y кгм	M_z кгм
Q	O	O	- Q	-Q.AC/2.cos60^O	Q.AC/2.sin60^O	0
Pp	-p. sin60^o	p. cos60^o	0	-p. cos60^O.AB	-p. sin60^O.AB	p. sin60^O.AC
T	0	-T	0	O	0	-T. sin60^O.AC
X_A	X_A	0	0	0	X_A.AB	0
Y_A	0	Y_A	0	- Y_A.AB	0	0
X_B	X_B	0	0	0	0	0
Y_B	0	Y_B	0	0	0	0
Z_B	0	0	Z_B	0	0	0

В таблице учтены знаки проекций сил и их моменты относительно осей. Взяв алгебраическую сумму в каждом из столбцов таблицы, получим уравнения равновесия для данной системы сил.

$\Sigma X_i = -p.\ \sin60^O + X_A + X_B = 0$ (5)

$\Sigma Y_i = p.\ \text{cosn}60^O - T + Y_B + X_A = 0$ (6)

$\Sigma Zi = -Q + Z_B = 0$ (7)

$\Sigma M_x = -Q.\ AC/2.\cos60^O - P.\ \cos60^O.AB - Y_B.AB = 0$ (8)

$\Sigma My = Q.\ AC/2.\sin60^O - P.\ \sin60^O + X_A.AB = 0$ (9)

$\Sigma Mz = P.\ AC.\sin60^O - T\ AC.\sin60^O = 0$ (10)

Подставив данные из условия задачи и значения тригонометрических функций углов (5),(6),(7),(8),(9) и (10) и решив их в последовательности (7),(10), (9),(5),(6) найдем

Z_B = 40 кГ, T = 29 кГ, X_A = 8,66 кг, Y_A = -15 кГ, X_B = 8,66 кГ, Y_B = 25 кГ.