

2868

**Поверхности вращения**  
*Позиционные и метрические задачи*

Методические указания для студентов  
всех специальностей

Иваново 2009

Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
*“Ивановская государственная текстильная академия”*  
(ИГТА)

Кафедра начертательной геометрии и черчения

# **Поверхности вращения**

## ***Позиционные и метрические задачи***

**Методические указания для студентов  
всех специальностей**

Иваново 2009

В методических указаниях, предназначенных для студентов 1 курса всех специальностей, дана подробная информация о построении ортогональных проекций поверхностей вращения и решении на них позиционных и метрических задач.

Составители: канд. техн. наук, доц. Т.Н. Фомичева  
канд. техн. наук, доц. И.А. Легкова  
д-р техн. наук, проф. Е.Н. Никифорова

Научный редактор доц. А. Н. Лялина

## Оглавление

1. Поверхности вращения .....	4
2. Определение положения точек на поверхностях вращения .....	7
2.1. Точки на поверхности цилиндра .....	7
2.2. Точки на поверхности конуса .....	9
2.3. Точки на поверхности сферы .....	12
2.4. Точки на поверхности тора .....	14
3. Построение линий пересечения поверхностей вращения плоскостью ....	17
3.1. Сечение цилиндра плоскостью .....	17
3.2. Сечение конуса плоскостью .....	18
3.2.1. Построение натуральной величины эллипса .....	19
3.2.2. Построение натуральной величины параболы .....	21
3.2.3. Построение натуральной величины гиперболы .....	23
3.3. Сечение сферы плоскостью .....	25
3.4. Сечение тора плоскостью .....	26
3.5. Сечение глобоида плоскостью .....	29
4. Поверхности вращения с призматическими вырезами .....	30
4.1. Цилиндр с призматическим вырезом .....	31
4.2. Конус с призматическим вырезом .....	33
4.3. Сфера с призматическим вырезом .....	35
4.4. Тор с призматическим вырезом .....	37
Библиографический список .....	39

## 1. Поверхности вращения

Поверхности вращения составляют важную группу поверхностей, которые широко применяются в практике, что объясняется распространенностью вращательного движения и простотой обработки поверхностей вращения на станках. Поверхность вращения образуется вращением линии (образующей) вокруг неподвижной оси. Образующей поверхности вращения может быть как кривая линия, так и прямая линия, т.е. эти поверхности могут быть линейчатыми и нелinearчатыми.

Поверхность вращения, представленная на рис. 1, является поверхностью общего вида. Эта поверхность имеет произвольную криволинейную образующую, которая вращается вокруг вертикальной оси. Каждая точка образующей линии при вращении вокруг оси описывает окружность.

Плоскости, перпендикулярные к оси поверхности, пересекают поверхность по окружностям, которые называются параллелями. Параллель поверхности вращения, имеющая наименьший радиус, называется горлом поверхности. Параллель, имеющая наибольший радиус – экватором.

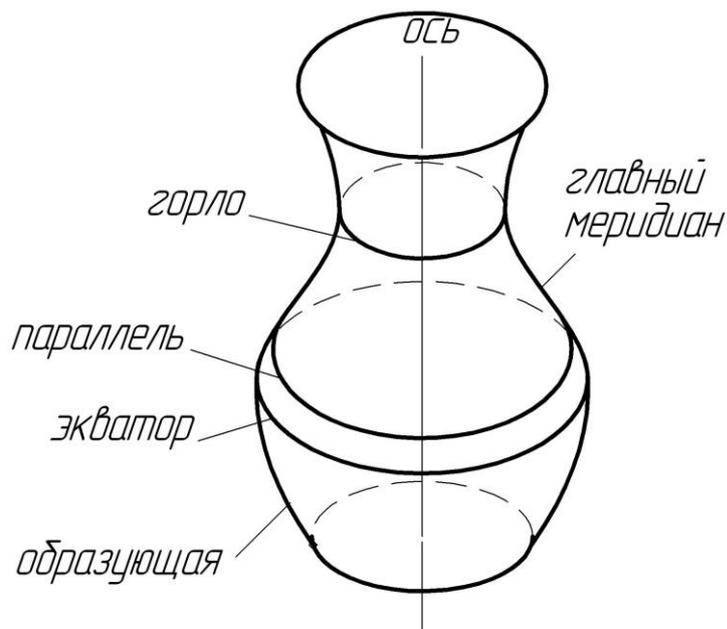


Рис. 1

Секущие плоскости, проходящие через ось поверхности вращения, пересекают эту поверхность по линиям, которые называются меридианами (все меридианы – конгруэнтные кривые), а плоскости называются меридиональными. Если ось вращения поверхности параллельна плоскости проекций  $\pi_2$ , то меридиан, расположенный в плоскости, параллельной фронтальной плоскости проекций  $\pi_2$ , называется главным (фронтальным) меридианом по отношению к плоскости  $\pi_2$ . На плоскость  $\pi_2$  главный меридиан в этом случае проецируется без искажения. Главный меридиан поверхности вращения является очерком поверхности на плоскость  $\pi_2$ . Очерком поверхности вращения на горизонтальную плоскость проекций  $\pi_1$  в данном случае является окружность – экватор, так как ось вращения перпендикулярна к плоскости  $\pi_1$ . Если меридиан поверхности вращения пересекается с осью этой поверхности, точка пересечения называется вершиной поверхности вращения.

Если меридиан является замкнутой кривой линией, то поверхность вращения называется закрытой.

Цилиндрическая и коническая поверхности вращения образуются путем вращения прямой линии вокруг оси. Меридианы прямого кругового цилиндра – прямоугольники. Меридианы прямого кругового конуса – равнобедренные треугольники.

Сфера (шар) – поверхность, образованная вращением окружности вокруг своего диаметра. Поверхность шара является закрытой поверхностью. У сферы экватор и меридианы являются окружностями одного диаметра, т.е. равны между собой.

Тор – поверхность, образованная вращением окружности вокруг оси, лежащей в плоскости окружности, не проходящей через центр. Тор называется:

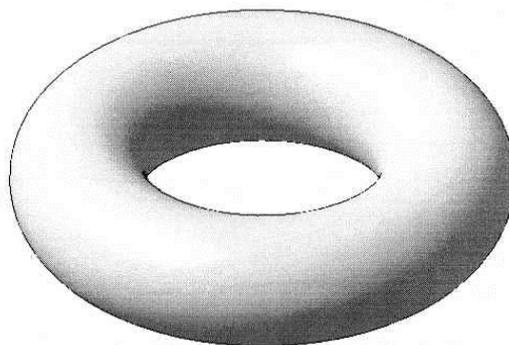
- открытым (тор – кольцо), если радиус образующей окружности меньше расстояния от центра окружности до оси вращения (рис. 2, а);
- замкнутым, если радиус образующей окружности равен расстоянию от цен-

тра окружности до оси вращения (рис. 2, б);

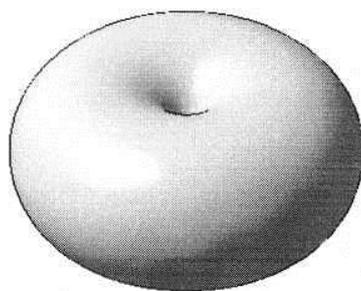
- самопересекающимся (лимоновидным), если радиус образующей окружности больше расстояния от центра до оси вращения (рис. 2, в).

Для тора открытого и замкнутого образующей является окружность, а для самопересекающегося тора – дуга окружности.

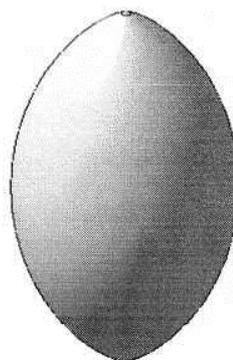
Среди криволинейных поверхностей вращения отметим эллипсоид, параболоид и двуполостный гиперболоид, образующиеся при вращении кривых линий, – эллипса, параболы, гиперболы. Указанные кривые линии располагаются симметрично относительно своей оси, которая является осью вращения. При вращении параболы вокруг своей оси образуется одна поверхность. При вращении же эллипса или гиперболы образуются по две поверхности, так как у этих кривых имеются по две оси.



а)



б)



в)

Рис. 2

При изображении поверхности вращения на чертеже целесообразно располагать поверхность таким образом, чтобы ось вращения этой поверхности располагалась перпендикулярно к плоскости проекций  $\pi_1$  или  $\pi_2$ .

## 2. Определение положения точек на поверхностях вращения

Положение любой точки, расположенной на поверхности вращения, можно определить с помощью параллели, проходящей через эту точку. Рассмотрим примеры определения положения точек на поверхностях цилиндра, конуса, сферы и тора.

### 2.1. Точки на поверхности цилиндра

На рис. 3 изображен прямой круговой цилиндр (цилиндр называется прямым, если его поверхность перпендикулярна к плоскости основания). Если основание прямого кругового цилиндра параллельно какой-либо плоскости проекций, то на эту плоскость цилиндр проецируется в виде окружности, а на две другие плоскости проекций – в виде прямоугольников.

Фронтальный очерк цилиндра определяется проекцией главного меридиана, в который входят образующие  $l$  и  $l'$ , расположенные в плоскости, параллельной фронтальной плоскости проекций  $\pi_2$ . Профильный очерк определяется образующими  $k$  и  $k'$ , расположенными в плоскости, параллельной профильной плоскости проекций  $\pi_3$ . Данная поверхность цилиндра является горизонтально проецирующей, поэтому горизонтальной проекцией является окружность. Все параллели для прямого кругового цилиндра равны между собой и потому на плоскость  $\pi_1$ , перпендикулярную оси цилиндра, проецируются в виде одной окружности – окружности основания.

На рис. 3 точка А расположена на фронтальном очерке цилиндра, точка В – на профильном. Следовательно, легко можно построить недостающие

проекция точки, принадлежащей очерку.

Положение точки на поверхности вращения, не принадлежащей очерку, можно определить с помощью окружности – параллели.

Рассмотрим построение проекций точек М и К, расположенных на боковой поверхности цилиндра и заданных, соответственно, их фронтальной  $M_2$  и профильной  $K_3$  проекциями (рис. 3).

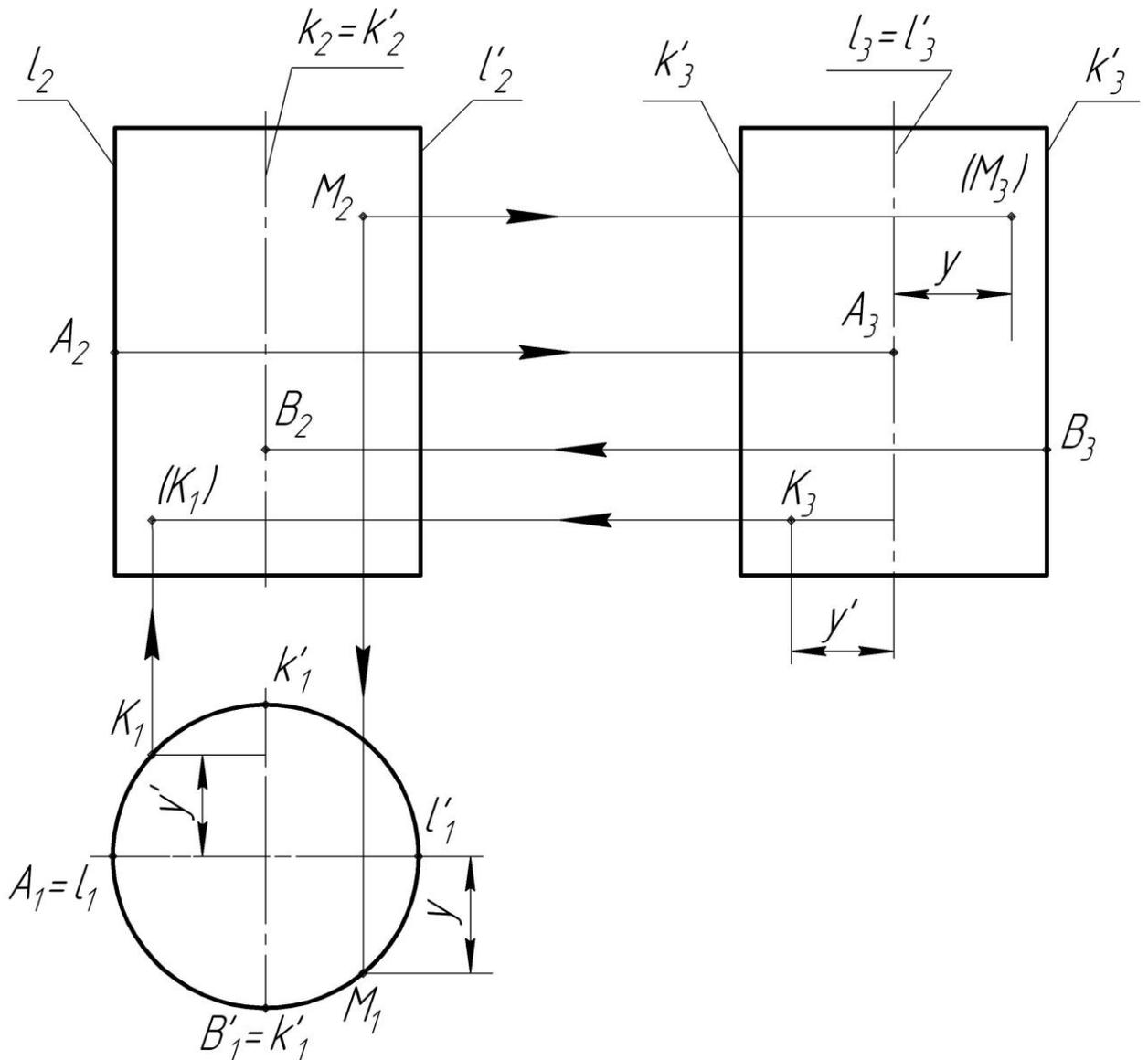


Рис. 3

При определении положения проекций точек, расположенных на боковой поверхности цилиндра, следует учитывать их видимость при взгляде на

плоскость проекций. При взгляде на плоскость проекций  $\pi_1$  все точки, расположенные на боковой поверхности прямого кругового цилиндра, считаются условно видимыми. При взгляде на плоскость проекций  $\pi_2$  видимы точки, расположенные ниже горизонтальной оси в плоскости  $\pi_1$  и справа от оси в плоскости  $\pi_3$ . При взгляде на плоскость проекций  $\pi_3$  видимы точки, расположенные слева от оси в плоскостях  $\pi_1$  и  $\pi_2$ . Невидимые проекции точек на чертеже заключаются в скобки.

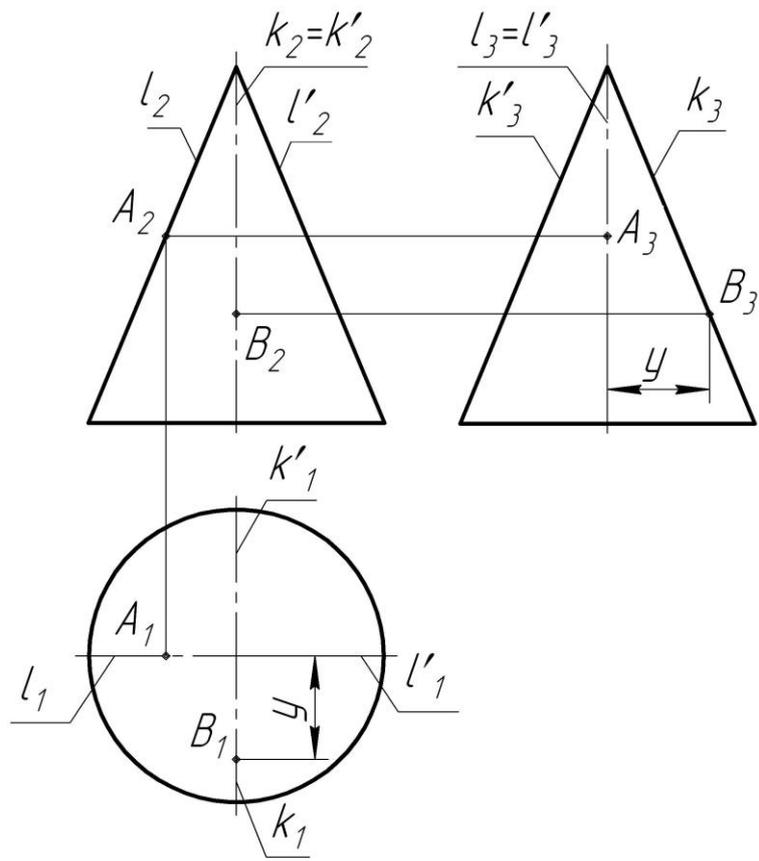
Для точки  $M$ , заданной её фронтальной проекцией  $M_2$ , по линиям связи с учетом видимости проекции  $M_2$  определяем горизонтальную проекцию  $M_1$ . По линиям связи с учетом координаты по оси  $y$  определяем положение проекции  $M_3$  в плоскости  $\pi_3$  и видимость проекции  $M_3$  (она невидима, т.к. расположена справа от оси цилиндра).

Для точки  $K$ , заданной её профильной проекцией  $K_3$ , определяем координату точки по оси  $y$  (в плоскости  $\pi_3$ ) и откладываем измеренную координату от горизонтальной оси в плоскости  $\pi_1$ . С учетом видимости профильной проекции  $K_3$  определяем горизонтальную проекцию  $K_1$ . Затем по линиям связи определяем фронтальную проекцию  $K_2$  и её видимость (она невидима).

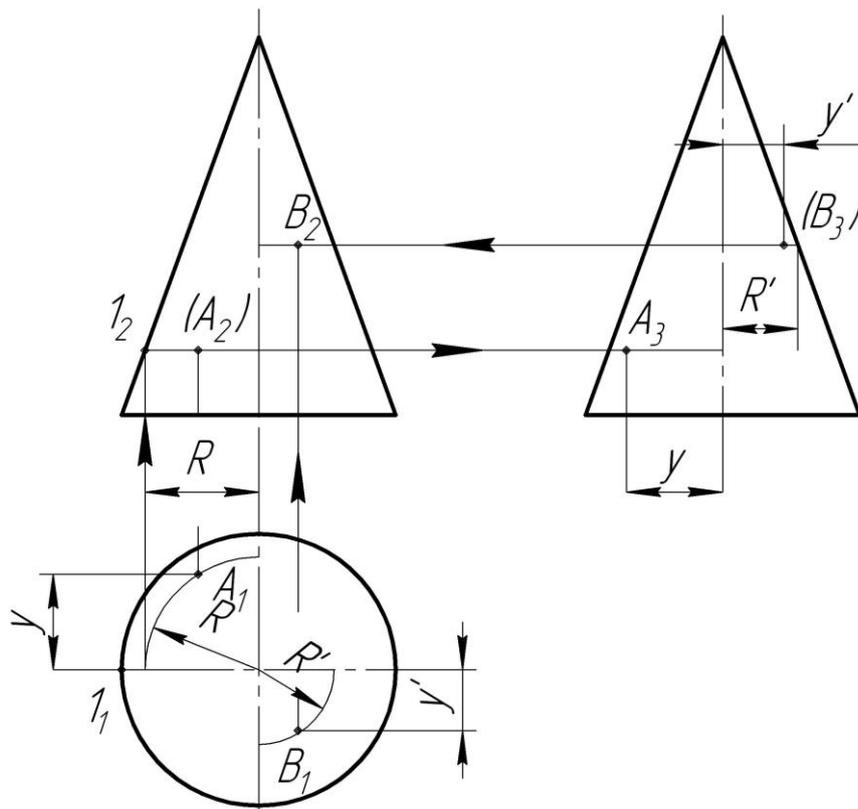
## 2.2. Точки на поверхности конуса

Фронтальный и профильный очерки прямого кругового конуса – равнобедренные треугольники, а горизонтальный очерк – окружность основания. Фронтальный очерк конической поверхности определяется проекцией главного меридиана, т.е. проекциями образующих  $l$  и  $l'$ , расположенных в плоскости, параллельной плоскости проекций  $\pi_2$ . Плоскость, параллельная плоскости проекций  $\pi_3$ , пересекает конус по образующим  $k$  и  $k'$ , проекции которых определяют профильный очерк.

На рис. 4, а точка  $C$  расположена на фронтальном очерке конуса, точка  $D$  – на профильном.



a)



б)

Рис. 4

Определим недостающие проекции точек  $A$  и  $B$ , расположенных на боковой поверхности конуса, если они заданы соответственно проекциями  $A_1$  и  $(B_3)$  (рис. 4, б). Видимость для точек, лежащих на поверхности конуса, определяется аналогично видимости точек, лежащих на поверхности цилиндра.

Радиус  $R$  окружности параллели для точки  $A$  в плоскости  $\pi_1$  определяется как расстояние от центра окружности до проекции  $A_1$ . Этим радиусом через точку  $A_1$  проводим дугу окружности до пересечения с горизонтальной осью – точка  $1_1$ , по линиям связи определяем проекцию  $1_2$ , она лежит на образующей конуса. Точка  $1_2$  определяет положение параллели, радиус которой в плоскости  $\pi_2$  измеряется как расстояние от оси до образующей. На этой параллели лежит проекция  $A_2$  (она невидима). Профильная проекция  $A_3$  определяется по линиям связи с учетом её координаты по оси  $y$  (проекция  $A_3$  видима).

Для точки  $B$ , заданной проекцией  $(B_3)$ , радиус  $R'$  окружности – параллели в плоскости  $\pi_3$  (как и в  $\pi_2$ ) определяется как расстояние от оси до образующей. В плоскости  $\pi_1$  проводим дугу радиусом  $R'$ , на ней с учетом удаления по оси  $y$  и видимости точки  $B$  в плоскости  $\pi_3$  определяем проекцию  $B_1$ . Проекцию  $B_2$  (она видима) определяем по линиям связи.

Положение точки на боковой поверхности конуса можно определить и с помощью образующей, проходящей через заданную точку. Через заданные проекции точек  $N_1$  и  $M_2$  (рис. 5) проводим соответственно горизонтальную  $S_11_1$  и фронтальную  $S_22_2$  проекции образующих, затем строим их недостающие проекции ( $S_21_2$  и  $S_12_2$ ) и по линиям связи определяем недостающие проекции точек  $N_2$  и  $M_1$ .

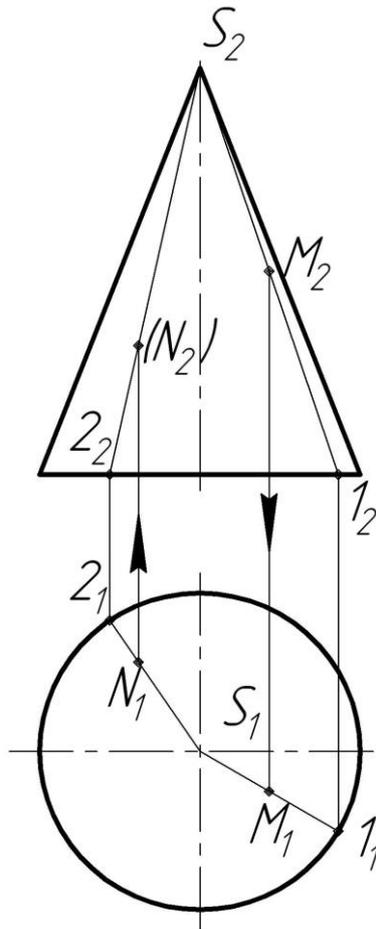


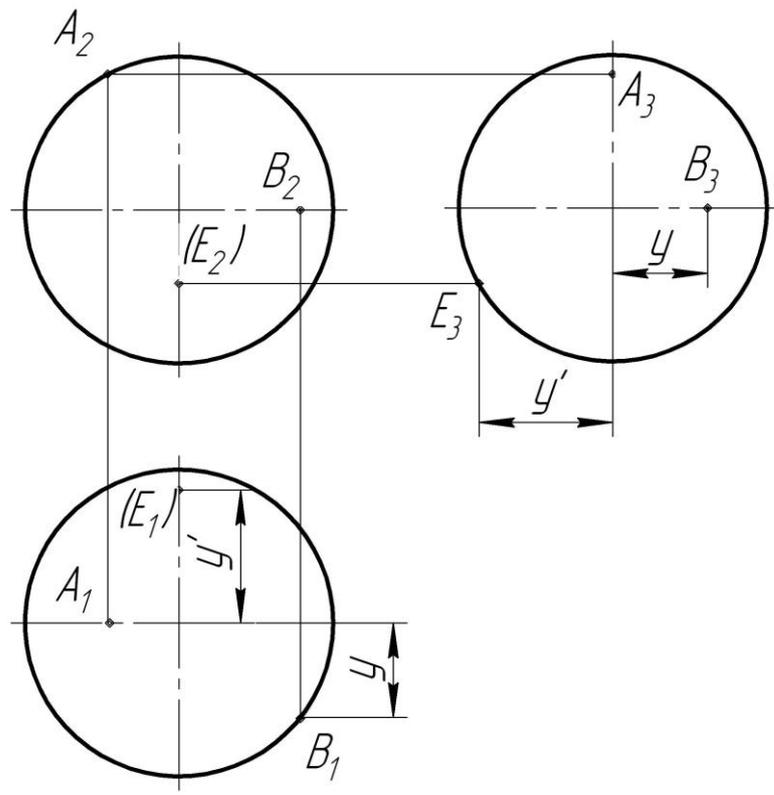
Рис. 5

### 2.3. Точки на поверхности сферы

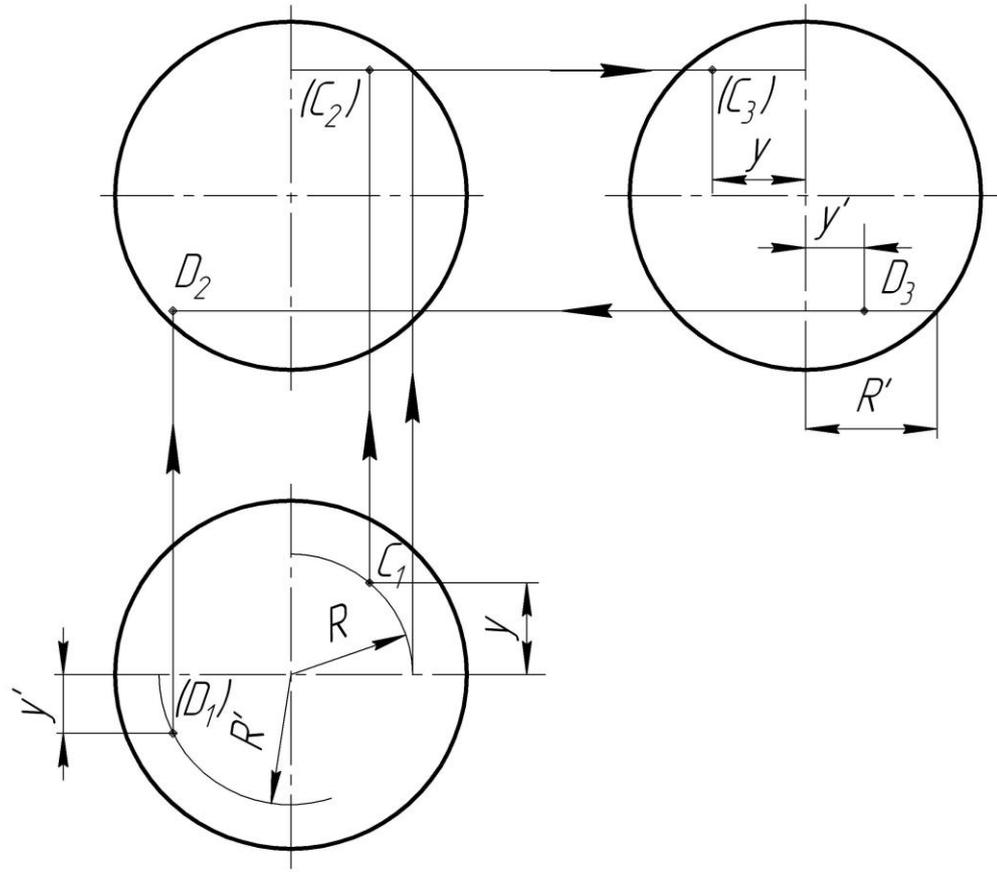
Сфера проецируется на все три плоскости проекций в одинаковые окружности. На горизонтальную плоскость проекций без искажения проецируется экватор, на фронтальную плоскость – главный меридиан, на профильную плоскость – профильный меридиан.

На рис. 6, а показаны точки, принадлежащие очеркам: точка А – фронтальному, В – горизонтальному, Е – профильному.

В отличие от поверхности цилиндра и конуса для точек, расположенных на поверхности сферы, необходимо определять видимость при взгляде на плоскость проекций  $\pi_1$ . На плоскости  $\pi_1$  видимы точки, расположенные над экватором, в плоскостях  $\pi_2$  и  $\pi_3$ .



a)



б)

Рис. 6

Определим недостающие проекции точек  $C$  и  $D$ , расположенных на поверхности сферы и заданных соответственно горизонтальной проекцией  $C_1$  и профильной  $D_3$  (рис. 6, б).

Радиус окружности – параллели, проходящей через заданную точку, в плоскости  $\pi_1$  определяется как расстояние от центра окружности до проекции точки, а в плоскостях  $\pi_2$  и  $\pi_3$  как расстояние от оси до образующей (аналогично поверхности конуса).

По радиусу  $R$  для точки  $C_1$  определяем положение параллели в плоскости  $\pi_2$ , а затем и проекцию  $C_2$  по линиям связи. Проекция  $C_2$  в плоскости  $\pi_2$  лежит над экватором, так как проекция  $C_1$  задана видимой, а сама проекция  $C_2$  невидима, потому что проекция  $C_1$  лежит выше горизонтальной оси в плоскости  $\pi_1$ . Профильная проекция точки  $C_3$  определяется по линиям связи с учетом удаления по оси  $u$ . Проекция  $C_3$  невидима, так как лежит на правой стороне сферы при взгляде на плоскость  $\pi_3$ .

Для точки  $D_3$  радиус  $R'$  окружности параллели в плоскости  $\pi_3$  определяется как расстояние от оси до образующей. Радиусом  $R'$  проводим окружность в плоскости  $\pi_1$  и на ней по удалению точки  $D_3$  по оси  $u$  определяем проекцию  $D_1$ . Проекция  $D_1$  невидима, так как проекция  $D_3$  лежит ниже экватора. По линиям связи определяем проекцию  $D_2$ , она видима.

#### 2.4. Точки на поверхности тора

На рис. 7 показано построение точек  $A$  и  $B$ , принадлежащих фронтальному очерку, точки  $C$  на горизонтальном очерке, а также промежуточных точек  $D$  и  $E$ , расположенных на поверхности тора-кольца, их положение определено с помощью параллелей. При этом в плоскостях, перпендикулярных оси тора, имеются два семейства окружностей – параллелей, принадлежащих внутренней и внешней сторонам поверхности тора. Считаем, что точки  $D$  и  $E$  расположены на внешней стороне тора.

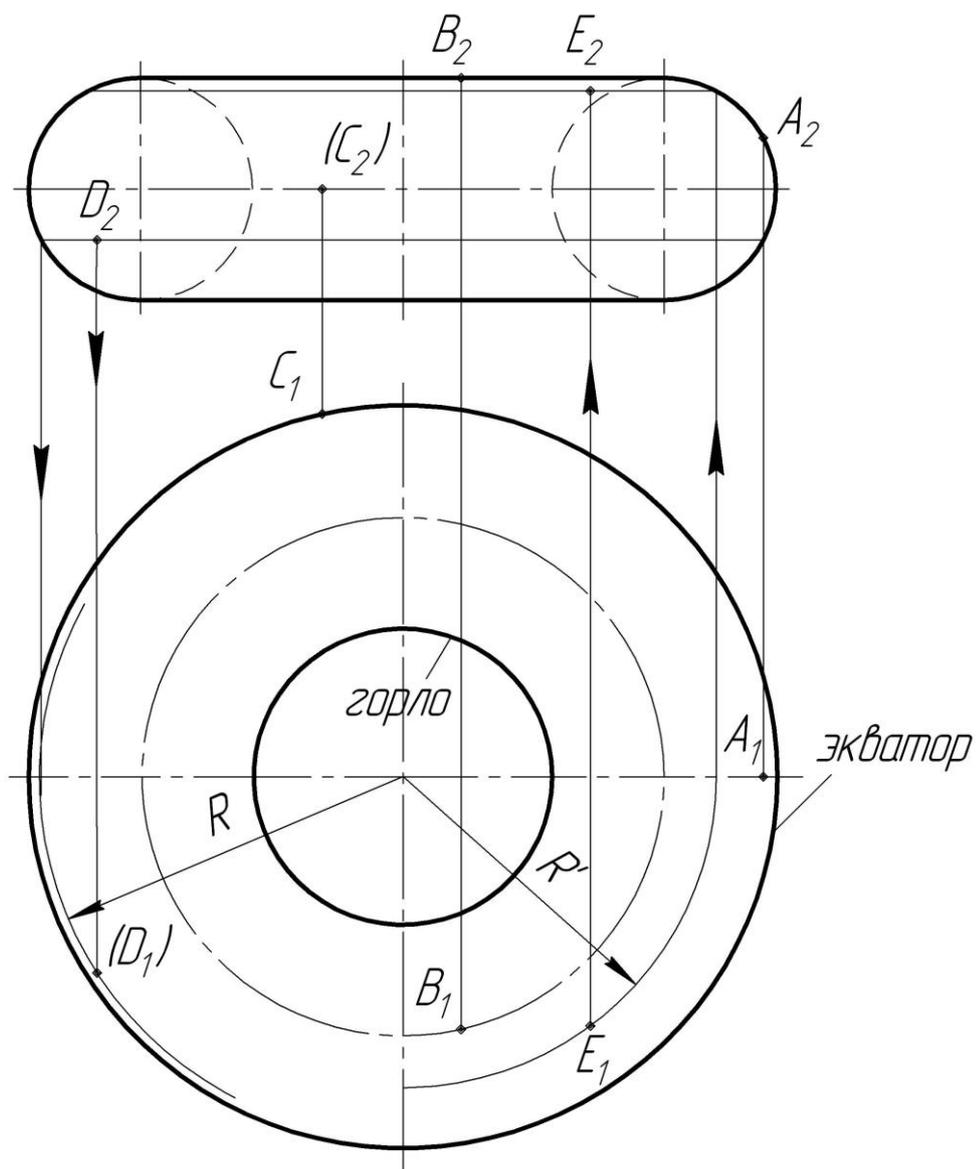


Рис. 7

Стрелками указан порядок построения проекций: горизонтальной  $D_1$  по фронтальной  $D_2$  и фронтальной  $E_2$  по горизонтальной  $E_1$ . При определении видимости точек, расположенных на поверхности тора, следует учитывать с внешней стороны кольца (сторона экватора) или внутренней (сторона горла) расположена точка. Для внешней стороны кольца видимость определяется аналогично видимости точек, расположенных на поверхности сферы (см. рис. 6, б). Для внутренней стороны тора-кольца все точки, расположенные на его поверхности, невидимы при взгляде на плоскости  $\pi_2$  и  $\pi_3$ . Точки  $D$  и  $E$  видимы, так как расположены на внешней стороне кольца.

На рис. 8 построены проекции точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , расположенных на поверхности самопересекающегося тора и заданных соответственно проекциями  $A_2, B_1, (C_2)$  и  $D_3$ . Точка  $A$  принадлежит фронтальному очерку тора, точка  $C$  – горизонтальному, точка  $D$  – профильному. Построения выполняются аналогично построениям для конуса (см. рис. 4).

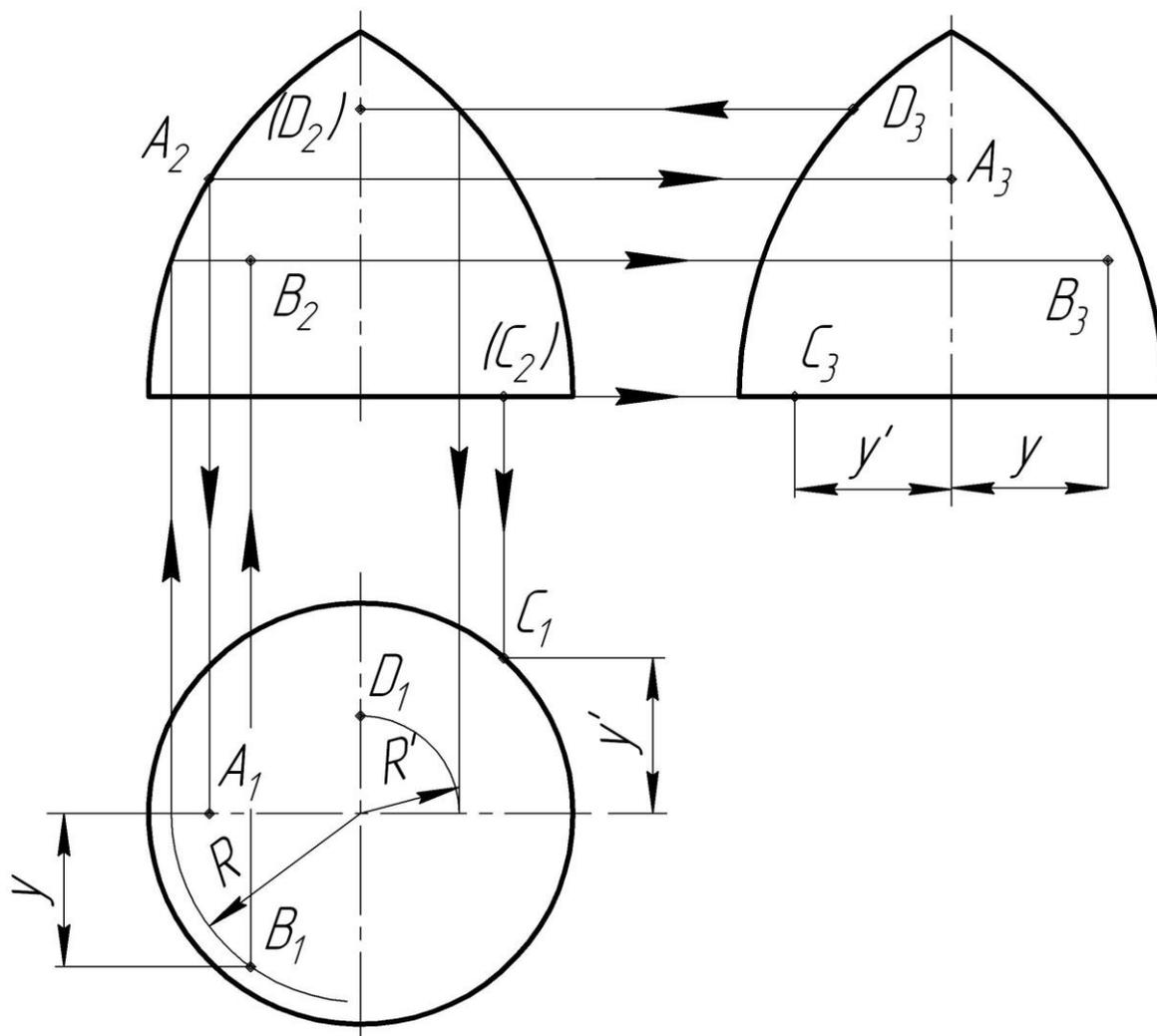


Рис. 8

### **3. Построение линий пересечения поверхностей вращения плоскостью**

Для нахождения кривой линии, получаемой при пересечении линейчатой поверхности плоскостью, следует в общем случае строить точки пересечения образующих поверхности с секущей плоскостью, т.е. находить точку пересечения прямой с плоскостью.

Если же кривая поверхность нелинейчатая, то для построения линии пересечения такой поверхности плоскостью в общем случае следует применять вспомогательные плоскости. Точки искомой линии определяются в пересечении линий, по которым вспомогательные секущие плоскости пересекают данную поверхность и плоскость.

В некоторых случаях при пересечении кривой поверхности плоскостью получается одна из известных закономерных кривых линий – эллипс, парабола, гипербола, спираль Архимеда и другие. В этих случаях такая кривая линия может быть построена на основании её свойств.

#### **3.1. Сечение цилиндра плоскостью**

При пересечении цилиндра вращения плоскостью, параллельной оси вращения, получается прямоугольник (рис. 9, а). Если секущая плоскость перпендикулярна к оси вращения, в результате сечения цилиндра этой плоскостью получается окружность (рис. 9, б). В общем случае, когда секущая плоскость наклонена к оси цилиндра, в сечении получается эллипс (рис. 9, в).

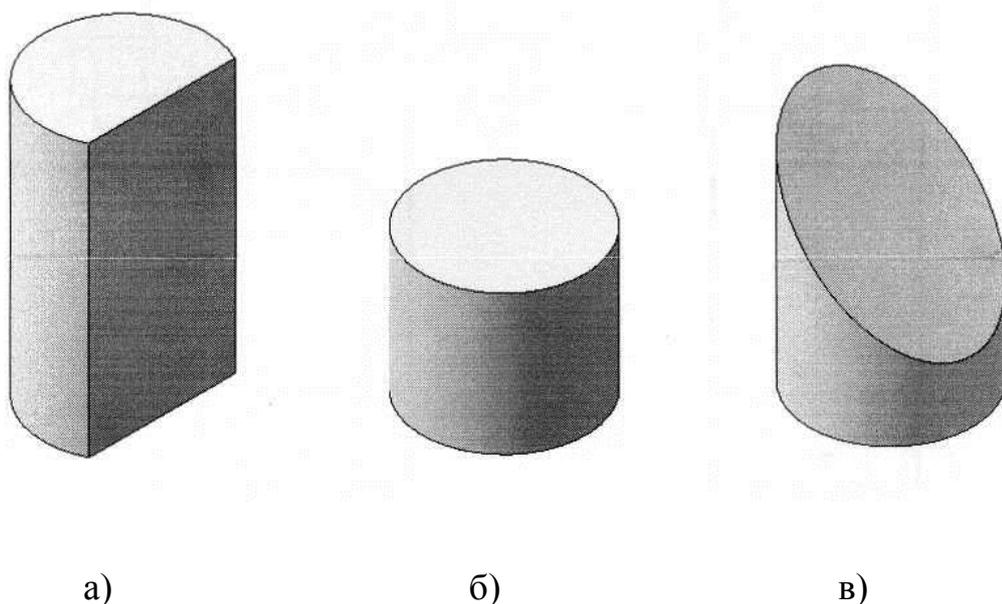


Рис. 9

### 3.2. Сечение конуса плоскостью

В зависимости от направления секущей плоскости в сечении конуса вращения могут получиться различные линии, называемые линиями конического сечения. Так, если секущая плоскость проходит через вершину конуса, в его сечении получается треугольник (рис. 10, а). В результате пересечения конуса плоскостью, перпендикулярной к оси конуса, получается окружность (рис. 10, б). Если секущая плоскость наклонена к оси конуса и не проходит через его вершину, в сечении конуса могут получиться эллипс, парабола или гипербола. Эллипс получается в том случае (рис. 10, в), когда секущая плоскость пересекает все образующие конуса. Парабола получается (рис. 10, г), если секущая плоскость пересекает все образующие, кроме одной, которой она параллельна. Гипербола получается, когда секущая плоскость параллельна двум образующим конуса и в частном случае (рис. 10, д), когда секущая плоскость параллельна оси конуса.

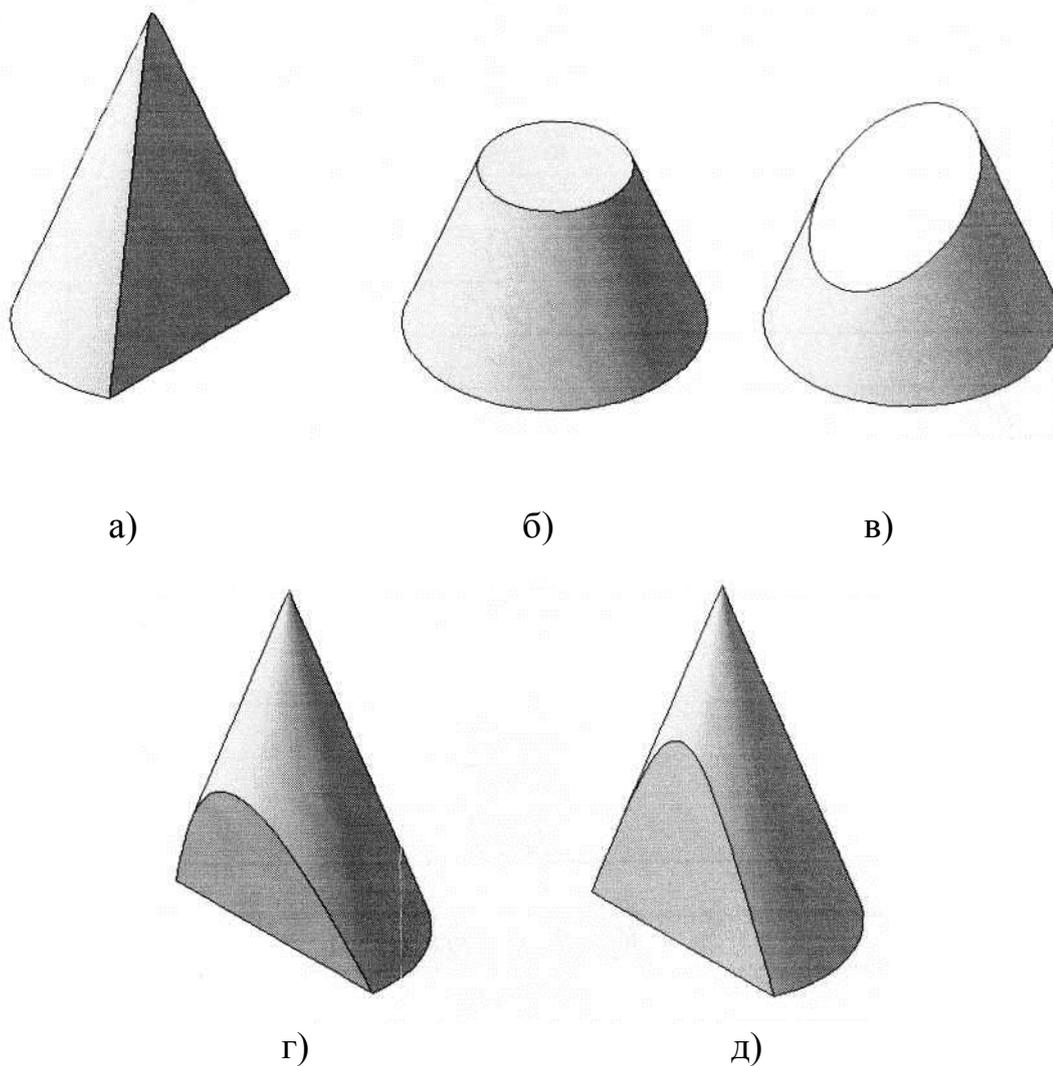


Рис. 10

Рассмотрим построение натуральных величин эллипса, параболы и гиперболы, лежащих в секущей плоскости.

### 3.2.1. Построение натуральной величины эллипса

Положение точек сечения (рис. 11) в плоскости  $\pi_1$  определяем как для любых точек, расположенных на поверхности конуса (см. раздел 2.2). Все точки сечения, кроме точек А и В, лежащих на граничных образующих, имеют симметричные себе. Например, С и С', 1 и 1' и т.д.

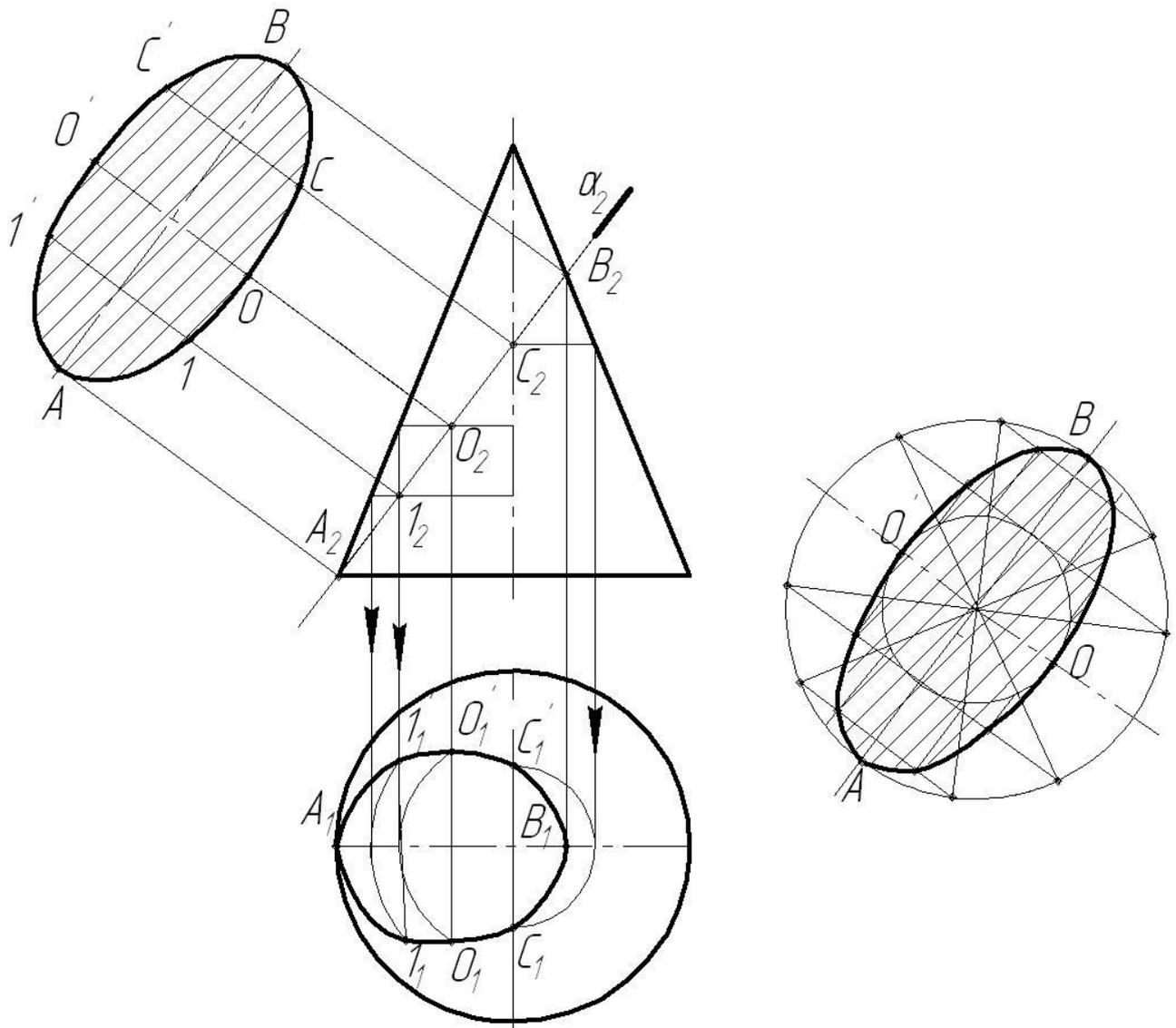


Рис. 11

Натуральная величина большой оси эллипса (рис. 11) определяется отрезком  $A_2B_2$  ( $A_2$  и  $B_2$  – точки пересечения секущей плоскости с граничными образующими), натуральная величина малой оси эллипса – отрезком  $O_1O'_1$ . Проекция  $O_2$  – середина отрезка  $A_2B_2$ , в плоскости  $\pi_1$  строим горизонтальные проекции точек  $O_1$  и  $O'_1$ . Таким образом,  $AB = A_2B_2$  и  $OO' = O_1O'_1$ .

На рис. 11 даны два способа построения эллипса:

- методом замены плоскостей проекций с использованием опорных и промежуточных точек;

- по большой и малой осям методом концентрических окружностей. На свободное место параллельным переносом выносим отрезок  $AB = A_2B_2$ . Отрезок  $AB$  делим пополам и из этой точки проводим большую и малую окружности для эллипса. Большую окружность делим на 12 частей и точки деления попарно соединяем диаметрами. Через точки деления большой окружности проводим прямые, параллельные малой оси эллипса, а через точки малой окружности – параллельные большой оси эллипса. Точки пересечения соответствующих прямых принадлежат эллипсу. Полученные точки соединяем плавной кривой.

На рис. 12 показано построение неполного эллипса, когда секущая плоскость пересекает основание конуса по прямой. Эллипс на поверхности ограничен точками  $D$  и  $D'$ , расположенными на окружности основания. Отрезки  $A_2B_2$  и  $O_1O'_1$  также определяют размеры большой и малой оси эллипса.

Построение эллипса, расположенного в сечении цилиндра (рис. 8, в), выполняется аналогично, только длина малой оси эллипса равна диаметру основания цилиндра.

### **3.2.2. Построение натуральной величины параболы**

На рис. 13 показано сечение конуса плоскостью  $\alpha$ , параллельной одной из образующих конуса, и построена натуральная величина сечения заданной плоскостью. Сначала строим проекцию сечения в плоскости  $\pi_1$ . Точка  $B$  лежит на образующей конуса, точки  $A$  и  $A'$  – на основании. Положение точек 1, 2 и  $C$  (и симметричных им) определяем с помощью параллелей (см. раздел 2.2). На рис. 13 отмечен радиус параллели для точек 2 и  $2'$ .

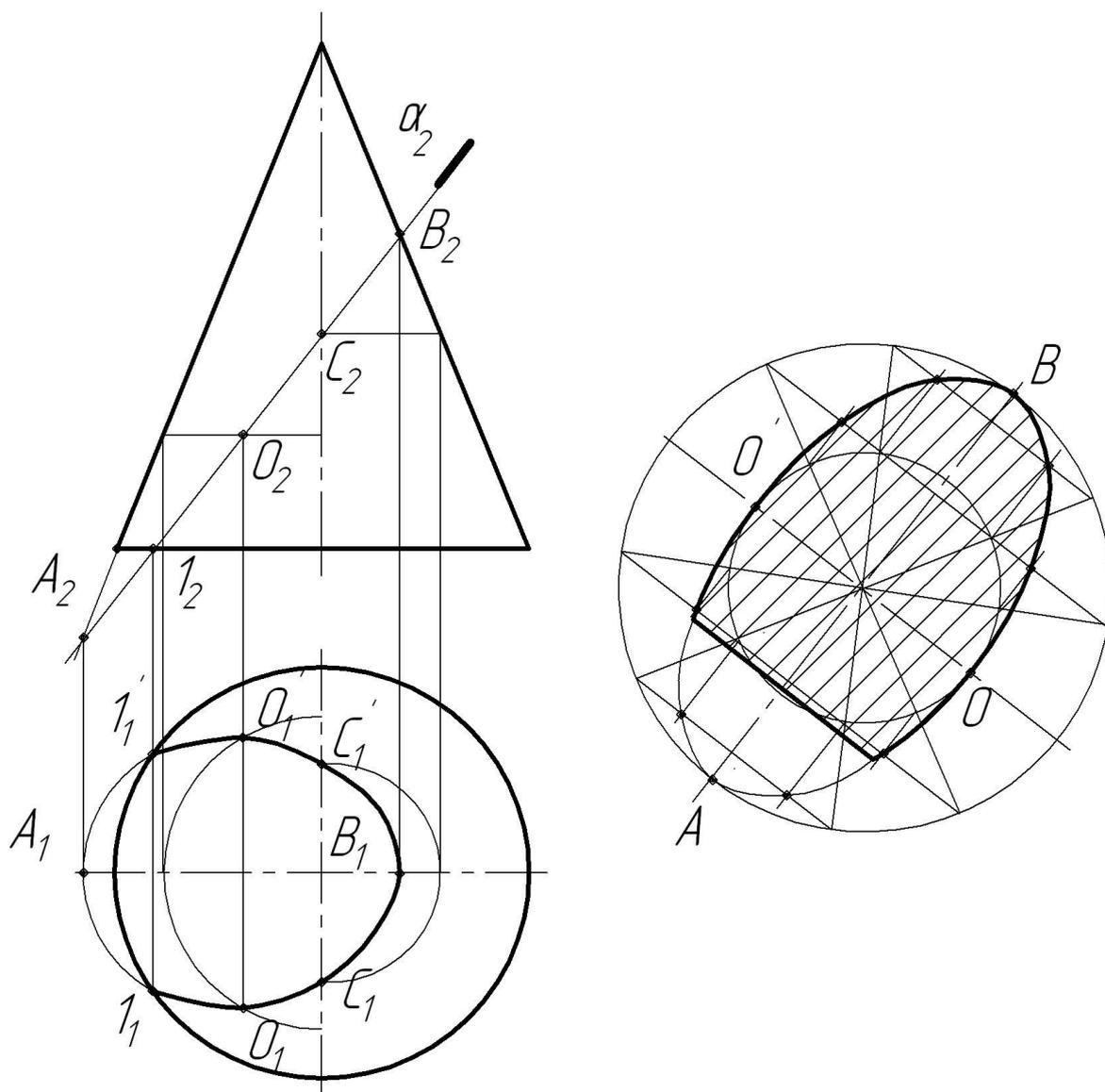


Рис. 12

Натуральную величину сечения определяем способом замены плоскостей проекций. На свободном месте проводим ось, параллельную следу  $\alpha_2$ , и откладываем на ней отрезок, равный  $A_2B_2$ . Точка  $B$  – вершина параболы. На построенной оси отмечаем аппликаты для точек 1, 2 и  $C$  (и симметричных им), взятые с плоскости  $\pi_2$ . Из отмеченных на оси точек восстанавливаем к ней перпендикуляры и откладываем на них расстояния для точек  $A$  и  $A'$ , 1 и 1' и т.д., взятые с плоскости  $\pi_1$ . На чертеже отмечено расстояние  $m$  для точки 1. Полученные точки соединяем плавной кривой.

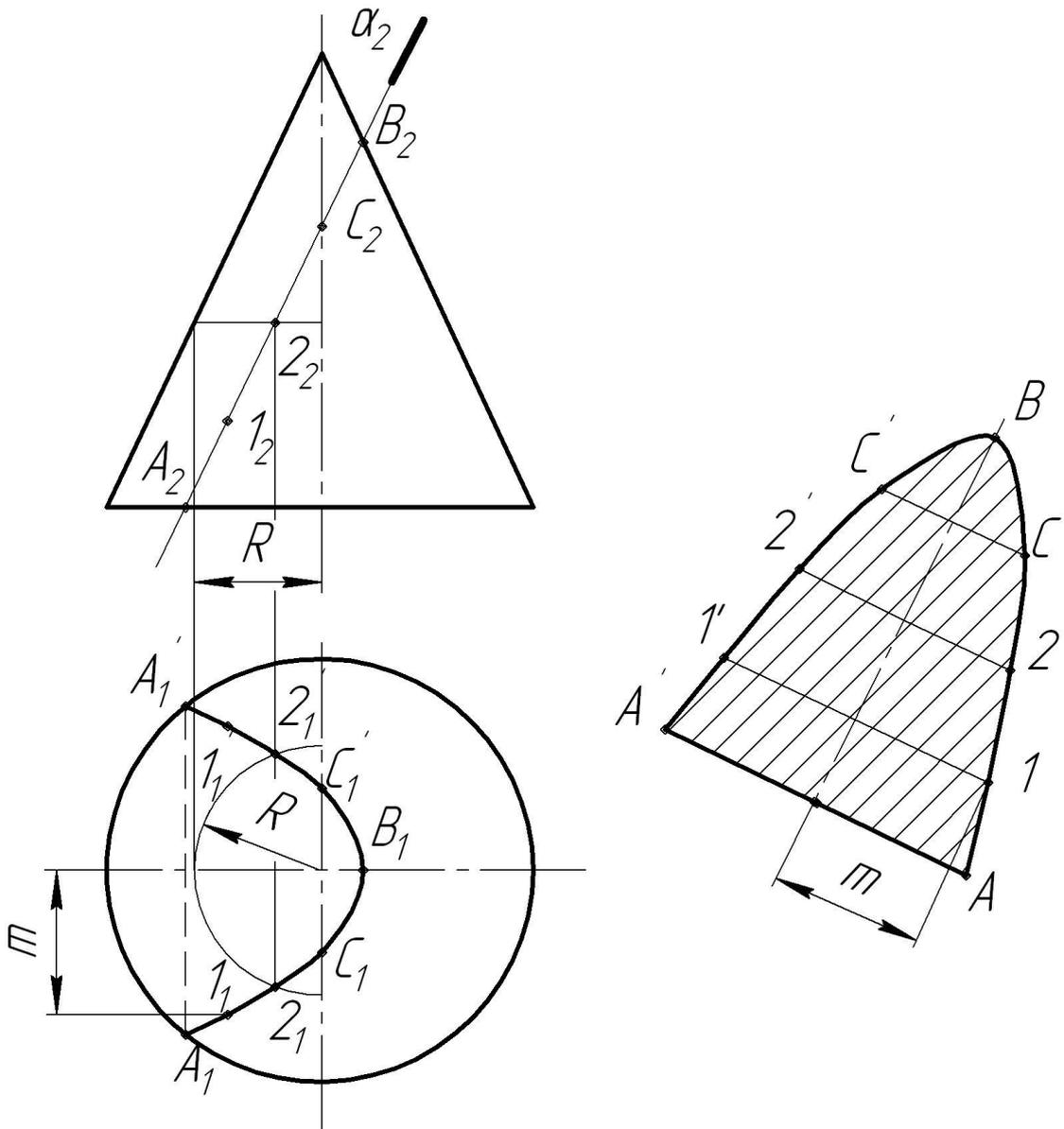


Рис. 13

### 3.2.3. Построение натуральной величины гиперболы

Положение точек сечения  $C_2$  и  $1_2$  (рис. 14) в плоскости  $\pi_2$  строим с помощью образующих (см. рис. 5). На чертеже показаны построения для точки  $E_2$ , выполненные с помощью окружности – параллели (см. рис. 4).

Натуральную величину гиперболы (рис. 14) строим способом замены плоскостей проекций.

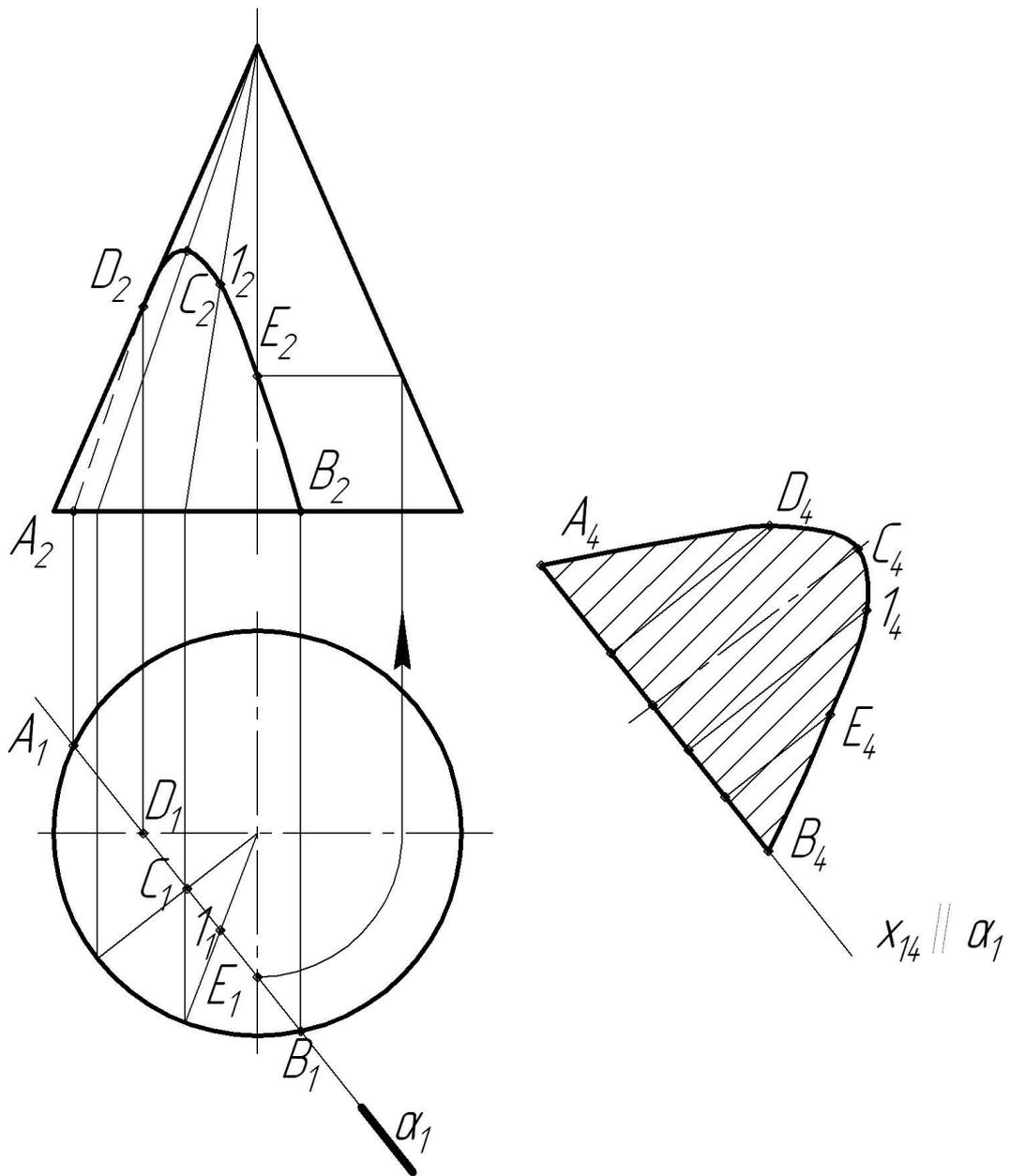


Рис. 14

По оси  $x_{14} \parallel \alpha_1$  откладываем расстояния, измеренные в плоскости  $\pi_1$ , из полученных точек восстанавливаем перпендикуляры. На перпендикулярах откладываем расстояния, взятые с плоскости  $\pi_2$ .

Вершина гиперболы – точка  $C$  определяется как основание перпендикуляра, проведенного из горизонтальной проекции вершины конуса на след плоскости  $\alpha_1$ . Для уточнения характера кривой используем точки, симметричные построенным.

### 3.3. Сечение сферы плоскостью

При пересечении сферы любой плоскостью в сечении всегда получается окружность. На рис. 15 показано построение сечения сферы фронтально-проецирующей плоскостью  $\alpha$ .

Радиус окружности сечения определяется с помощью перпендикуляра, опущенного из центра проекции сферы на секущую плоскость. Радиус сечения  $R = A_2O_2 = B_2O_2$ .

В зависимости от расположения секущей плоскости относительно плоскости проекций окружность, лежащая в секущей плоскости, может проецироваться на плоскость проекций в виде окружности, если секущая плос-

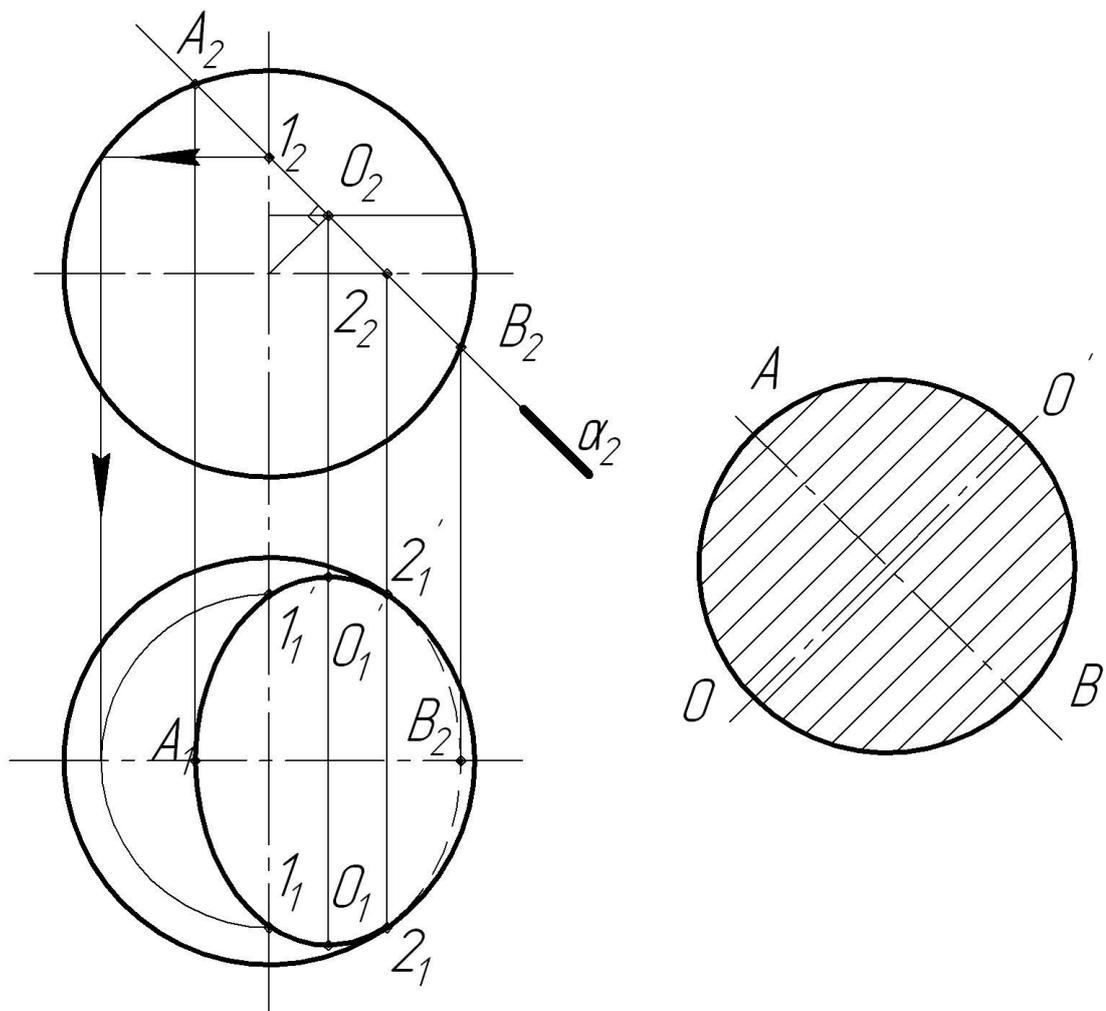


Рис. 15

кость параллельна плоскости проекций; в виде эллипса, если секущая плоскость не параллельна плоскости проекций; в виде отрезка прямой, если секущая плоскость перпендикулярна плоскости проекций.

Проекции точек сечения (рис. 15) в плоскости  $\pi_1$  построены с помощью окружностей – параллелей (см. раздел 2.3).

### 3.4. Сечение тора плоскостью

На рис. 16 показано построение сечения тора-кольца (изображена четверть) плоскостью  $\alpha$ . Точки А и В лежат на очерке кольца и в плоскости  $\pi_1$  проецируются на ось. Точка С определяет самое широкое место сечения, её положение находим с помощью перпендикуляра, опущенного из центра проекции на секущую плоскость – точка  $C_2$ . Проекции  $C_1$  и  $C'_1$  определяем с помощью параллелей. Аналогично строим проекции промежуточных точек сечения 1 и 1', 2 и 2'. Построения выполняем с помощью параллелей, имеющих радиус R и проходящих через точки 1 и 2.

Натуральную величину сечения определяем способом замены плоскостей проекций. На оси, расположенной параллельно следу  $\alpha_2$ , откладываем расстояния, измеренные в плоскости  $\pi_2$ , из этих точек восстанавливаем перпендикуляры, на которых откладываем расстояния для точек 1 и 1', С и С', 2 и 2', измеренные в плоскости  $\pi_1$ . Полученные точки соединяем плавной кривой.

Полученная кривая сечения напоминает эллипс, но это только внешнее сходство, так как кривая сечения тора выражается алгебраическим уравнением 4-го порядка.

На рис. 17 показано построение сечения фронтально-проецирующей плоскостью  $\alpha$  для лимбовидного тора (изображена верхняя часть). Так как секущая плоскость пересекает только одну из граничных образующих тора, то часть сечения находится за пределами тела. Чтобы построить фигуру сече-

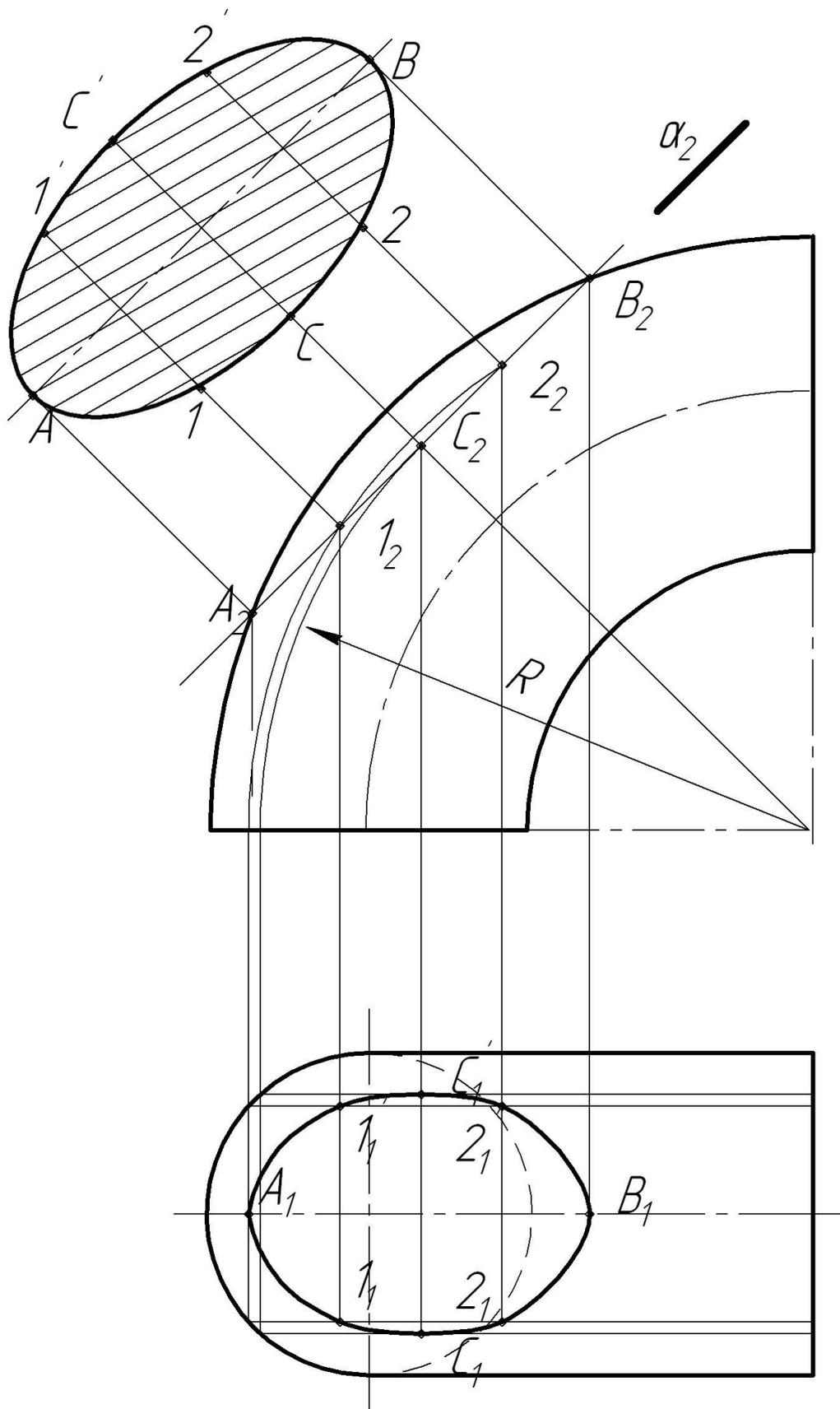


Рис. 16

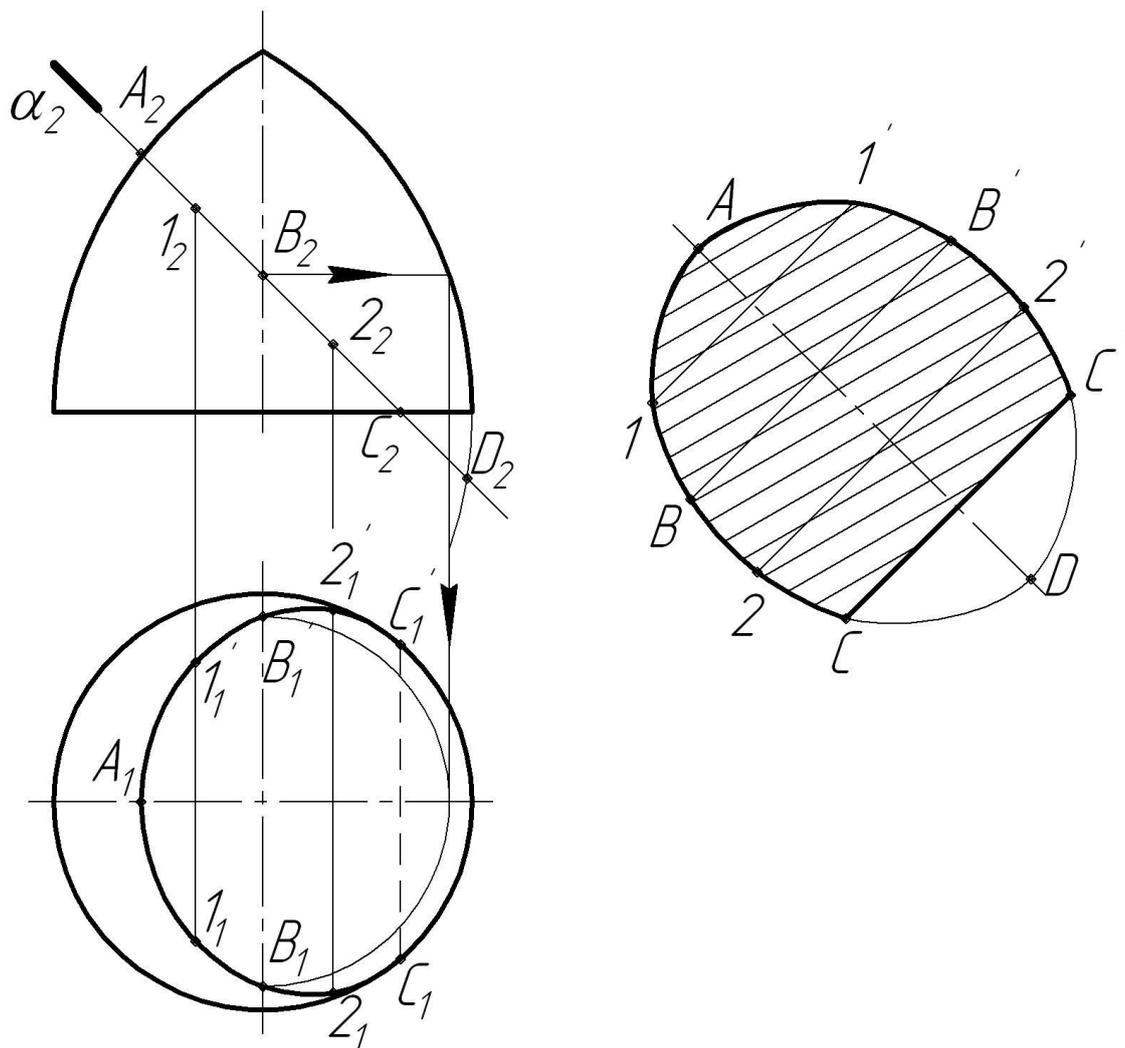


Рис. 17

ния полностью, продолжим граничную образующую до пересечения с секущей плоскостью – точка  $D$ .

Положение точек сечения в плоскости  $\pi_1$  определяем следующим образом. Горизонтальная проекция точки  $A$ , лежащей на граничной образующей, проецируется на ось – точка  $A_1$ . Точки  $C$  и  $C'$  принадлежат основанию. Проекции точек  $1$ ,  $B$  и  $2$  и симметричных им точек определяются с помощью параллелей. На чертеже показано построение точек  $B$  и  $B'$ .

Натуральную величину фигуры сечения строим способом замены плоскостей проекций, построения выполняются аналогично рис. 16.

### 3.5. Сечение глобоида плоскостью

На рис. 18 показано построение сечений глобоида фронтально-проецирующей плоскостью  $\alpha$  и горизонтально-проецирующей плоскостью  $\beta$ . Глобoidом называется тор, ось вращения которого расположена вне дуги окружности.

Точки, принадлежащие проекции сечения глобоида плоскостью  $\alpha$  на плоскость  $\pi_1$ , определяем следующим образом. Точка В лежит на граничной образующей и в плоскости  $\pi_1$  проецируется на ось. Точки А и А' принадлежат основанию. Положение точек С, 1 и 2 и симметричных им точек опре-

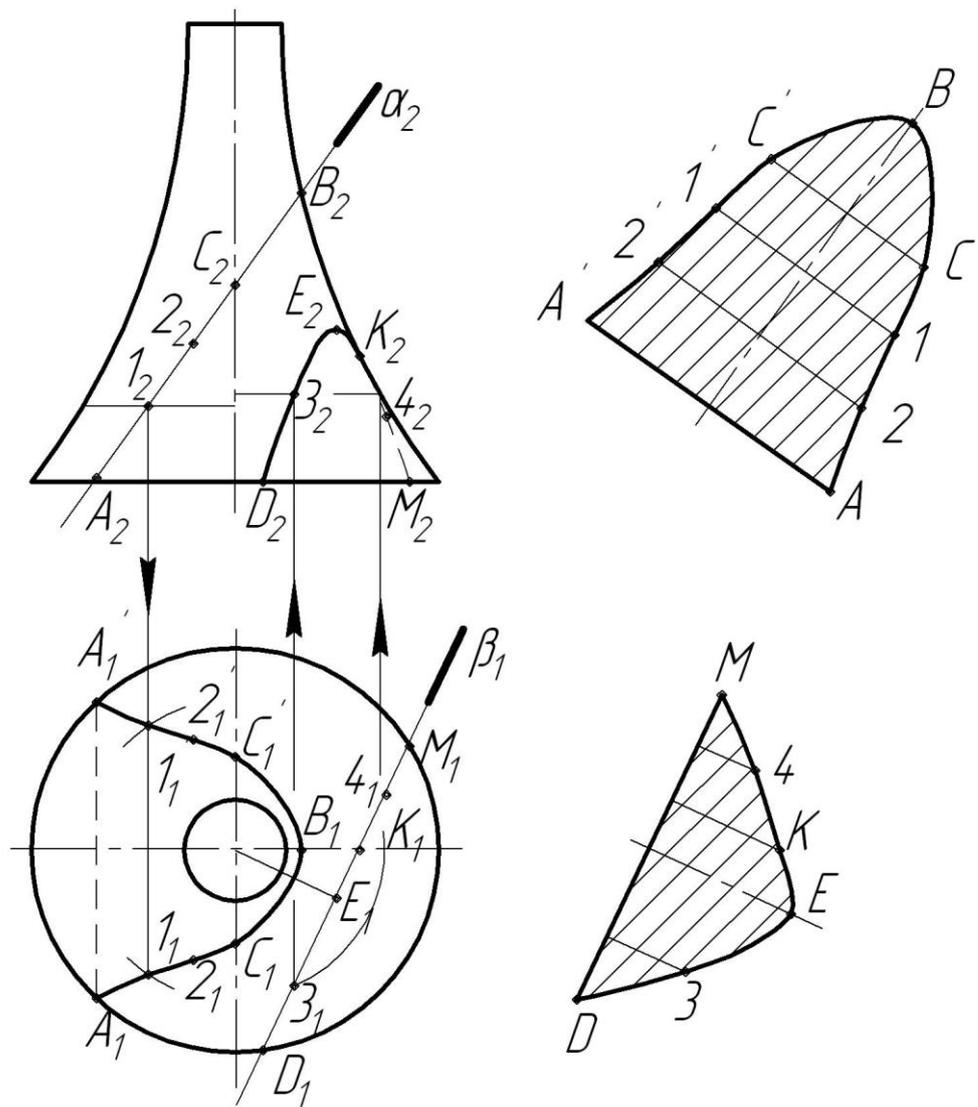


Рис. 18

деляем с помощью окружностей – параллелей. На чертеже (рис. 18) показаны построения для точки 1.

Проекцию сечения глобоида плоскостью  $\beta$  на плоскость  $\pi_2$  строим по следующим точкам. Точки D и M принадлежат основанию. Точка K – точка пересечения секущей плоскости с граничной образующей – проецируется на фронтальный очерк –  $K_2$ . Высшую точку сечения E определяем с помощью перпендикуляра, опущенного из центра проекции основания на секущую плоскость  $\beta$ , – проекция  $E_1$ . Проекция точек E, 3 и 4 в плоскости  $\pi_2$  строим с помощью параллелей. На чертеже (рис. 18) показаны построения для точки 3.

Натуральные величины сечения глобоида плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$  строим способом замены плоскостей проекций (см. разделы 2.2 и 2.4).

#### **4. Поверхности вращения с призматическими вырезами**

Построение призматического выреза выполняем в следующем порядке:

1. Обозначаем буквами опорные точки выреза – точки, принадлежащие очеркам (т.е. граничным образующим и осям), и точки, лежащие в пересечении секущих плоскостей (ребра призматического выреза).

2. Выбираем расположение вспомогательных точек (обозначаем их цифрами), необходимых для уточнения характера кривых. Количество вспомогательных точек должно быть оптимальным для построения кривой.

3. Построения начинаем с плоскости  $\pi_1$ . Положение точек определяем как для точек на поверхности вращения (см. раздел 2). Выполняем построения последовательно по секущим плоскостям выреза, соединяем только точки, принадлежащие одной плоскости. Обозначаем ребра – линии пересечения секущих плоскостей выреза.

4. Построения выреза в плоскости  $\pi_3$  выполняем в той же последовательности, что и в  $\pi_1$ .

5. Определяем видимость секущих плоскостей, так же как для тел вра-

щения без выреза, но с учетом расположения удаленной части тела.

б. Определяем наличие очерков в плоскостях  $\pi_1$  и  $\pi_3$ , удаленные части очерков изображаем тонкими линиями.

#### 4.1. Цилиндр с призматическим вырезом

Призматический вырез определяется тремя фронтально-проецирующими плоскостями  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , которые попарно пересекаются по прямым  $CC'$  и  $DD'$ . Плоскость  $\alpha$  пересекает цилиндр по окружности, в сечении цилиндра плоскостью  $\beta$  будет прямоугольник и плоскостью  $\gamma$  – эллипс.

Обозначаем опорные точки, принадлежащие призматическому вырезу (рис. 19). Проекции точек  $A_2$  и  $K_2$  принадлежат фронтальному очерку, проекции  $B_2$  и  $E_2$  – оси цилиндра (профильному очерку), проекции  $C_2C'_2$  и  $D_2D'_2$  – проекции ребер призматического выреза.

С учетом фигуры сечения, полученной при пересечении цилиндра секущей плоскостью (см. раздел 3.1), определяем расположение вспомогательных точек. При пересечении цилиндра плоскостью  $\gamma$  в сечении получаем эллипс, для его построения требуются вспомогательные точки ( $1_2$ ,  $2_2$  и  $3_2$ ), при построении сечений цилиндра плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$  вспомогательных точек не требуется.

В плоскости  $\pi_1$  все проекции точек, принадлежащих поверхности цилиндра, лежат на окружности основания (см. раздел 2.1). Все точки, принадлежащие вырезу, кроме точек  $A$  и  $K$ , лежащих на фронтальном очерке, имеют симметричные себе. Построение всех точек сечения выполняем последовательно по плоскостям, соединяем точки, принадлежащие только одной секущей плоскости. При своем пересечении плоскости выреза образуют ребра. Их положение в плоскости  $\pi_1$  (линии  $C_1C'_1$  и  $D_1D'_1$ ) с учетом видимости отмечаем пунктиром.

Построение выреза в плоскости  $\pi_3$  выполняем также по секущим плоскостям. Положение всех точек выреза в плоскости  $\pi_3$  строим по их координатам по оси  $y$  (см. раздел 2.1). Соединяем точки, принадлежащие только одной секущей плоскости. Отмечаем линии пересечения секущих плоскостей выреза  $C_3C'_3$  и  $D_3D'_3$ .

Определяем видимость линий выреза и наличие граничных образующих (профильного очерка) в плоскости  $\pi_3$ . При взгляде на  $\pi_3$  точки  $B$  и  $B'$

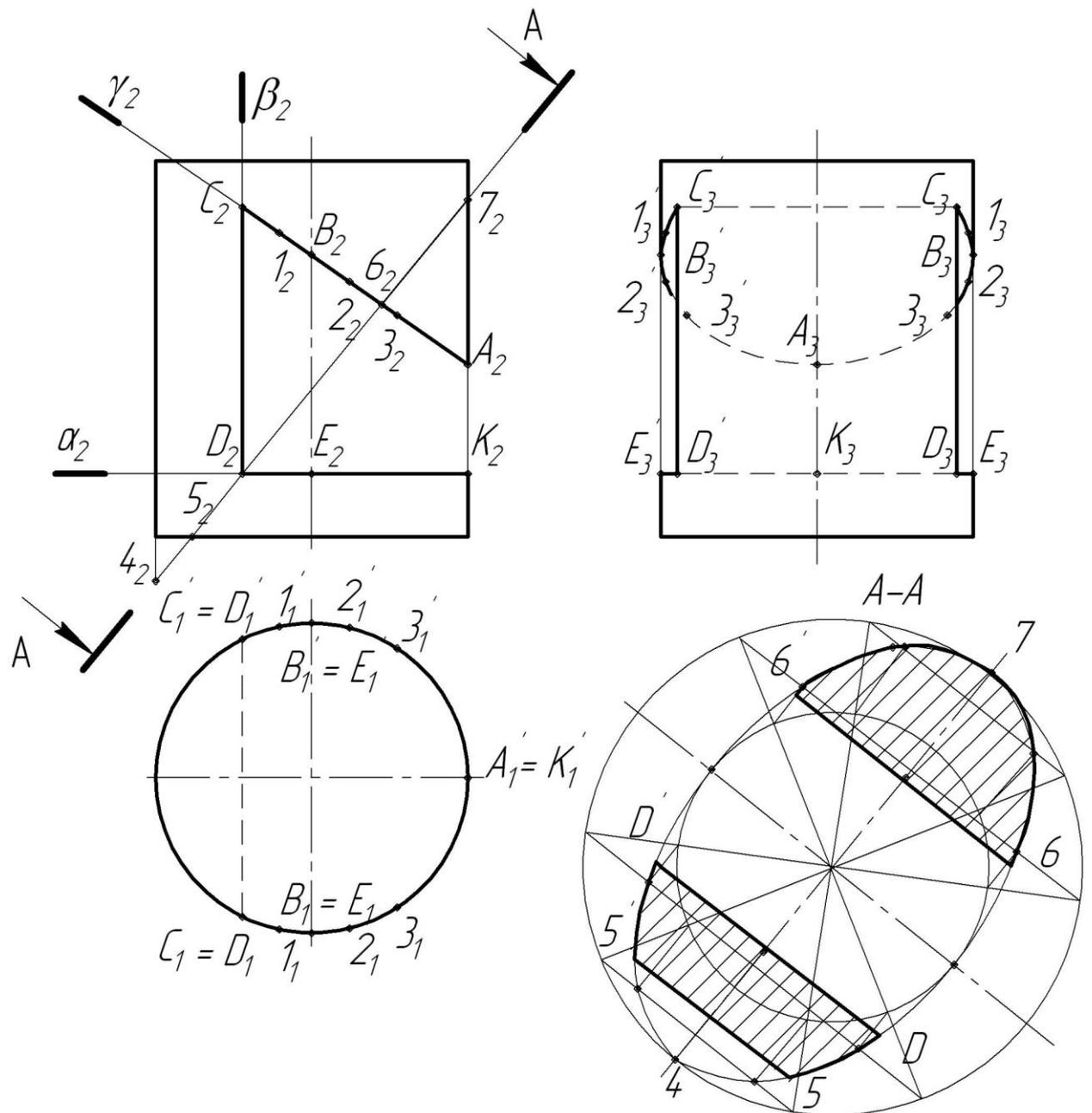


Рис. 19

должны определять границу видимости для плоскости  $\gamma$ , но так как часть тела вращения вырезана, то закрывать плоскость  $\gamma$  может только плоскость  $\beta$ .

Образующие отсутствуют на участках  $B_3E_3$  и  $B'_3E'_3$ , так как в плоскости  $\pi_2$  удалена часть тела на участке  $B_2E_2$  по оси  $z$ .

Сечение цилиндра заданной плоскостью – эллипс. Натуральную величину эллипса строим по большой и малой осям (см. раздел 3.2.1). Наличие тела в сечении определяем по проекции на плоскость  $\pi_2$ . Тело в секущую плоскость попадает на участках  $5_2D_2$  и  $6_27_2$ . Отмечаем эти участки на большой оси эллипса, через отмеченные точки проводим отрезки, параллельные малой оси, и выделенные участки штрихуем.

## 4.2. Конус с призматическим вырезом

На рис. 20 показано построение призматического выреза для конуса. Обозначаем опорные точки выреза. Точки  $A$  и  $K$  лежат на фронтальном очерке,  $C$  и  $E$  – на профильном очерке,  $B$  и  $D$  – в пересечении секущих плоскостей, составляющих вырез.

Выбираем вспомогательные точки. Сечение плоскостью  $\alpha$  – гипербола, для её построения берем вспомогательную точку 1. Сечение плоскостью  $\beta$  – эллипс, для его уточнения берем точку 2. Плоскость  $\gamma$  пересекает конус по окружности, для её построения дополнительные точки не требуются.

Строим проекции точек на плоскость  $\pi_1$  (см. раздел 2.2). Построенные проекции точек соединяем последовательно по плоскостям, отмечаем линии пересечения секущих плоскостей  $BB'$  и  $DD'$  с учетом их видимости.

Строим проекцию выреза на плоскость  $\pi_3$ . Построения также выполняем по плоскостям, отмечаем положение ребер.

Определяем видимость плоскостей выреза и наличие очерков в плоскостях  $\pi_1$  и  $\pi_3$ . При взгляде на плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_3$  все плоскости выреза види-

мы, невидимо только ребро  $DD'$  в плоскости  $\pi_1$ . В плоскости  $\pi_3$  очерк удален на участках  $C_3E_3$  и  $C'_3E'_3$  (так как в плоскости  $\pi_2$  вырезан участок образующей от точки  $C_2$  до точки  $E_2$ ).

Натуральную величину заданного сечения – эллипс строим по большой и малой осям (см. раздел 3.2.1). Все вспомогательные построения сохраняем. Наличие тела в сечении определяем аналогично цилиндру. Выделенные участки штрихуем.

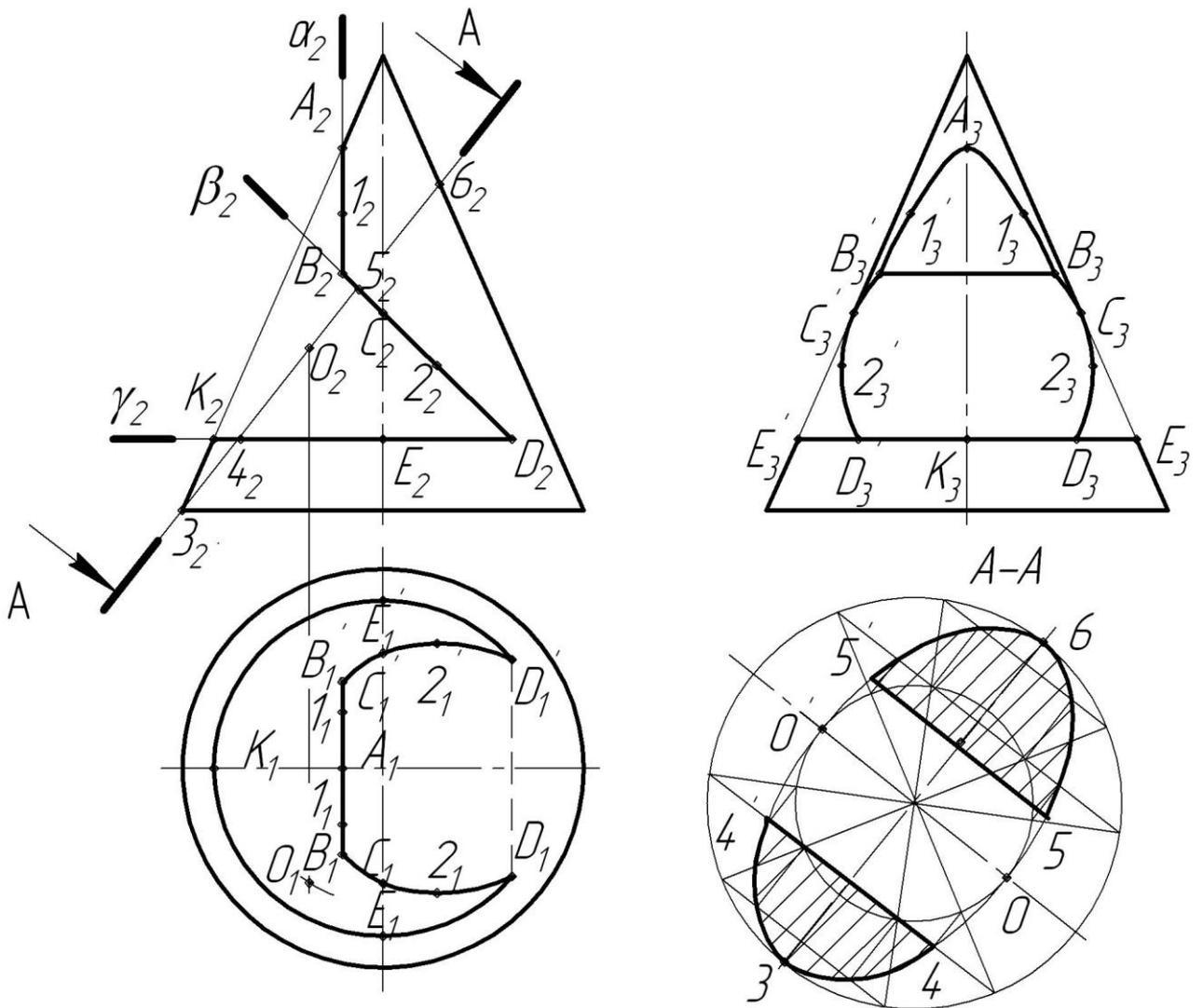


Рис. 20

### 4.3. Сфера с призматическим вырезом

Отмечаем опорные точки, принадлежащие вырезу (рис. 21). Точки А и К принадлежат фронтальному очерку, точки В и Е – горизонтальному очерку (в плоскости  $\pi_2$  они проецируются на горизонтальную ось), точка С – профильному очерку (в плоскости  $\pi_2$  она проецируется на вертикальную ось), точки С и D – пересечению плоскостей призматического выреза.

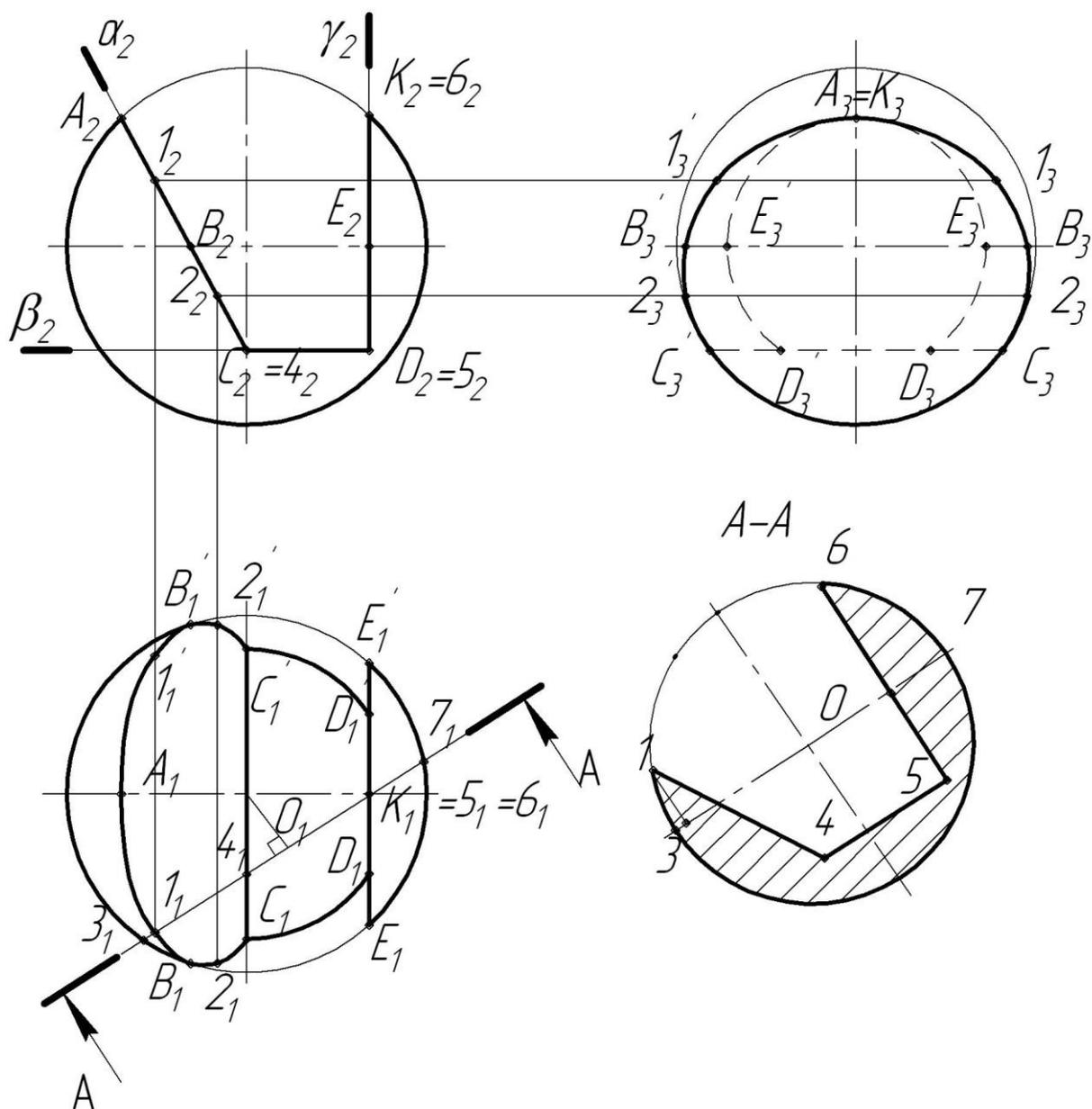


Рис. 21

Призматический вырез определяется тремя фронтально-проецирующими плоскостями  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Фигура сечения плоскостью  $\alpha$  проецируется на плоскости проекций  $\pi_1$  и  $\pi_3$  в виде эллипсов, для их построения берем вспомогательные точки. Фигура сечения плоскостью  $\beta$  проецируется на плоскость проекций  $\pi_1$  в натуральную величину (окружность), т.к.  $\beta \parallel \pi_1$ , а на плоскость  $\pi_3$  – в отрезок прямой; плоскость  $\gamma$  проецируется на плоскость  $\pi_1$  в отрезок прямой, а на плоскость  $\pi_3$  – в окружность, т.к.  $\gamma \parallel \pi_3$ ; для их построения вспомогательные точки не требуются.

Построения в плоскости  $\pi_1$  выполняем по секущим плоскостям, отмечаем положение ребер  $C_1C'_1$  и  $D_1D'_1$ .

Проекцию выреза на плоскость  $\pi_3$  также строим по секущим плоскостям. Отмечаем ребра.

Определяем видимость плоскостей выреза и наличие очерков в плоскостях проекций  $\pi_1$  и  $\pi_3$ . В плоскости  $\pi_1$  все плоскости выреза видимы, а очерк удален на участках  $B_1E_1$  и  $B'_1E'_1$  (так как на фронтальной проекции вырезан экватор от  $B_2$  до  $E_2$ ), в плоскости  $\pi_3$  плоскость  $\gamma$  невидима, а очерк удален сверху до точек  $C_3$  и  $C'_3$  (так как на фронтальной проекции профильный меридиан удален сверху до точки  $C_2$ ).

Строим натуральную величину сечения сферы горизонтально-проецирующей плоскостью  $\alpha$ . Она пересекает поверхность по окружности с центром в точке  $O$  (проекция  $O_1$  определяется с помощью перпендикуляра, опущенного из центра сферы на секущую плоскость); плоскость  $\alpha$  – по прямой 14, плоскость  $\beta$  – по прямой 45, плоскость  $\gamma$  – по прямой 56. Точка 4 принадлежит ребру  $CC'$ , а точка 5 – ребру  $DD'$ . Определим положение выше указанных точек в сечении. От точки 3 по оси откладываем отрезок, равный  $3_11_1$ , из отмеченной точки восстанавливаем перпендикуляр до пересечения с окружностью, получаем точку 1. От точки 7 откладываем отрезок  $7_15_1$  и восстанавливаем перпендикуляр, на перпендикуляре вниз от оси откладываем

отрезок  $E_25_2$ , отмечаем точку 5. От точки 5 параллельно оси строим отрезок, равный  $5_14_1$ , получаем точку 4. Построенные точки соединяем, окружность сечения обводим с учетом удаленной части, сечение штрихуем.

#### 4.4. Тор с призматическим вырезом

На рис. 22 приведено построение призматического выреза для тора.

Определяем опорные точки: точки А и К, лежащие на фронтальном очерке, В и Е – на профильном очерке (в плоскости  $\pi_2$  они проецируются на ось), С и D – в пересечении плоскостей призматического выреза.

Призматический вырез определяется тремя фронтально-проецирующими плоскостями. Все секущие плоскости пересекают тор по кривым линиям и при построении они требуют уточнения, поэтому берем вспомогательные точки 1, 2 и 3.

Строим проекции отмеченных точек на плоскость  $\pi_1$  (см. раздел 2.4). Построение выполняем по плоскостям, соединяем между собой точки, принадлежащие только одной секущей плоскости. Отмечаем линии пересечения плоскостей.

Последовательно по секущим плоскостям строим проекцию выреза в плоскости  $\pi_3$ , проводим ребра.

Определяем видимость плоскостей выреза при взгляде на плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_3$ . При взгляде на плоскость  $\pi_1$  все секущие плоскости видимы, невидимо только ребро  $C_1C'_1$ . Точки В и Е определяют, соответственно, границу видимости плоскостей  $\alpha$  и  $\gamma$  при взгляде на плоскость  $\pi_3$ . Ребра в плоскости  $\pi_3$  невидимы.

Наличие граничных образующих (очерка) в плоскости  $\pi_3$  определяется точками В и Е, на участках  $B_3E_3$  и  $B'_3E'_3$  очерк удален.

Строим натуральную величину сечения тора заданной горизонтально-проецирующей плоскостью. Точки 4 и 7 лежат на основании тора, точки В и

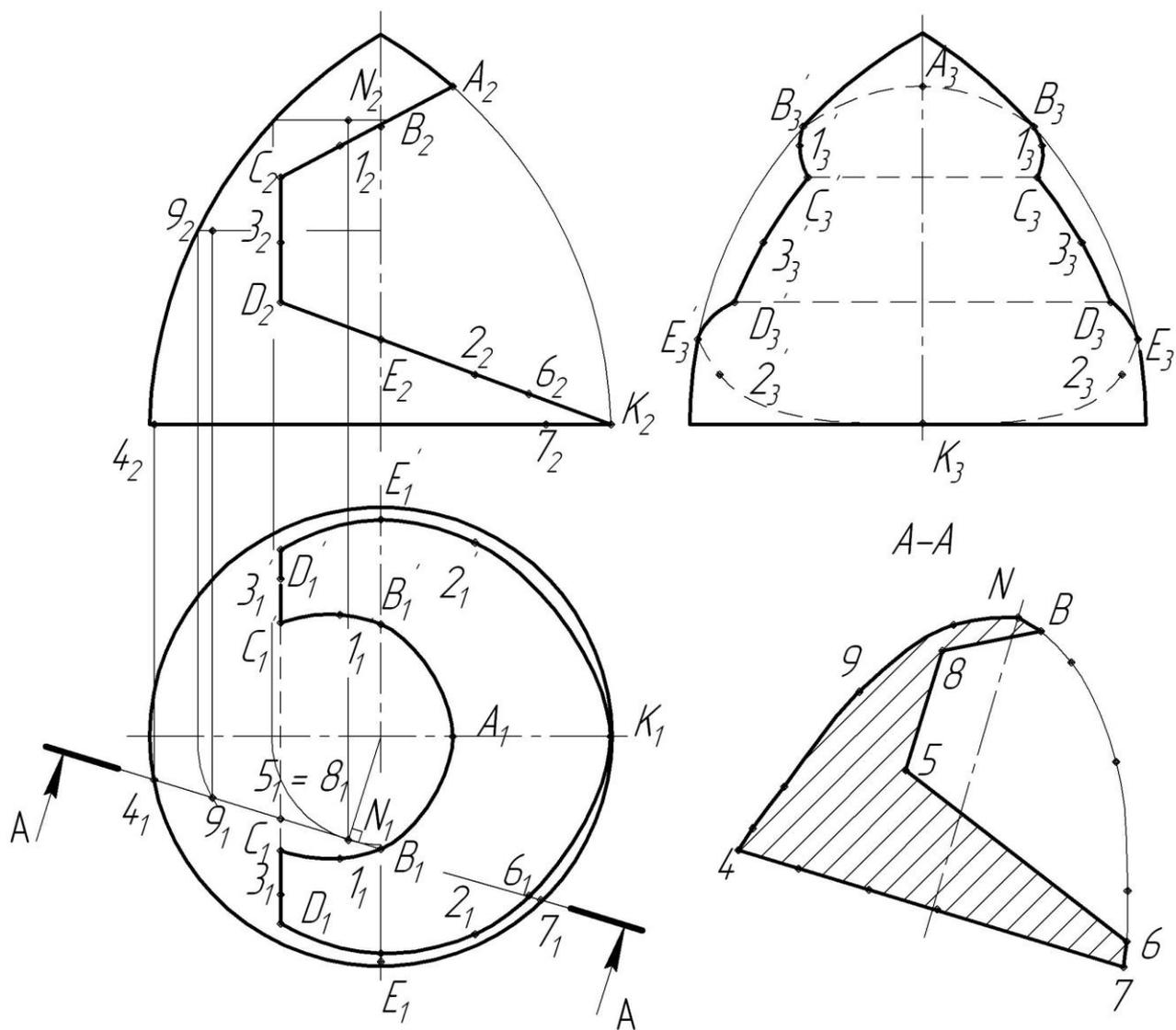


Рис. 22

б – в пересечении заданной плоскости с плоскостями  $\alpha$  и  $\gamma$  соответственно точки 5 и 8 – на ребрах  $DD'$  и  $CC'$ . Горизонтальную проекцию наивысшей точки сечения  $N_1$  (см. раздел 3.4) определяем с помощью перпендикуляра, проекцию  $N_2$  строим с помощью параллели. Точка 9 – вспомогательная точка для уточнения кривой сечения. Naturalную величину сечения строим способом замены плоскостей проекций, соответствующие аппликаты для точек сечения берем с плоскости  $\pi_2$ . Сечение обводим с учетом удаленной части и штрихуем.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гордон, В.О. Курс начертательной геометрии [Текст] / В.О. Гордон, М.А. Семенцов-Огиевский. – М.: Высшая школа, 1998.
2. Локтев, О.В. Краткий курс начертательной геометрии [Текст] / О.В. Локтев. – М.: Высшая школа, 1999.
3. Крылов, Н.Н. Начертательная геометрия [Текст] / Н.Н. Крылов. – М.: Высшая школа, 2000.
4. Бубенников, А.В. Начертательная геометрия [Текст] / А.В. Бубенников, М.Я. Громов. – М.: Высшая школа, 1973.
5. Лазариди, К.Х. Начертательная геометрия [Текст] / К.Х. Лазариди. – М.: Росвузнаука, 1990.

# Поверхности вращения

## *Позиционные и метрические задачи*

Методические указания для студентов  
всех специальностей

Составители: Татьяна Николаевна Фомичева  
Ирина Анатольевна Легкова  
Елена Николаевна Никифорова

Научный редактор А.Н. Лялина  
Редактор И.Н. Худякова  
Корректор К.А. Торопова

---

Подписано в печать 14.04.2009.

Формат 1/8 60× 84. Бумага писчая. Плоская печать.

Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 2,20. Тираж 100 экз. Заказ № \_\_\_\_\_

---

Редакционно-издательский отдел  
Ивановской государственной текстильной академии

Копировально-множительное бюро  
153000 г. Иваново, пр. Ф. Энгельса, 21