2965

МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Методические указания
к выполнению графической работы
для студентов всех специальностей

Иваново 2011

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
“*Ивановская государственная текстильная академия*”
(ИГТА)

Кафедра инженерной графики

МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Методические указания
к выполнению графической работы
для студентов всех специальностей

Иваново 2011

В методических указаниях, предназначенных для студентов 1 курса всех специальностей, рассматриваются задачи на определение метрических характеристик при проецировании точек, прямых линий и плоскостей. Приведены основные сведения о способах преобразования комплексного чертежа, рассмотрены примеры решения различных задач тем или иным способом, а также даны рекомендации по содержанию и оформлению графической работы «Метрические задачи».

Составители: канд. техн. наук, проф. Ю.М. Максимовский,
канд. техн. наук, доц. И.А. Легкова,
канд. техн. наук, доц. Т.Н. Фомичева

Научный редактор д-р техн. наук, проф. Е.Н. Никифорова

ВВЕДЕНИЕ

Метрическими называют задачи на определение геометрических величин: длин отрезков, углов, плоских фигур и т.д. Решение таких задач усложняется, если геометрическая фигура произвольно расположена относительно основных плоскостей проекций. Методы преобразования чертежа (замена плоскостей проекций, вращение вокруг прямой уровня и проецирующей, плоскопараллельное перемещение) позволяют расположить геометрическую фигуру в частное положение относительно системы плоскостей и тем самым облегчить решение задачи. Данные методические указания рассчитаны на студентов, владеющих методами преобразования чертежа.

При решении метрических задач важное значение имеют условия перпендикулярности прямых и плоскостей и их выполнение на комплексном чертеже. По этому вопросу даются основные сведения теоретического характера и примеры решения задач, напоминающие студентам правила построения взаимно перпендикулярных прямых, а также прямой, перпендикулярной к плоскости.

Навыки в решении метрических задач предлагается отрабатывать на примерах с поэтапным выполнением построения. Рассмотрены задачи с частным и общим расположением геометрических фигур относительно системы плоскостей проекций. Даются пояснения и обоснования к решению типовых задач. Затем формулируется задание на выполнение комплексной домашней графической работы "Метрические задачи" и даются рекомендации по ее оформлению.

Усвоив в процессе обучения теорию и практику решения метрических задач, студент, используя данные методические указания, самостоятельно выполняет работу и, сдавая ее преподавателю, дает устные пояснения о ходе решения каждой задачи.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. Точки пространства обозначаются прописными буквами латинского алфавита *A, B, C,…L, M, N,…* или арабскими цифрами *1, 2, 3,…11, 12, 13,…*
2. Прямые линии обозначаются строчными буквами латинского алфавита *a, b, c,… l, m, n,…*
3. Плоскости пространства обозначаются строчными буквами греческого алфавита $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \sigma, \tau, \ldots$
4. Линейные углы обозначаются строчными буквами греческого алфавита $\alpha^\circ, \beta^\circ, \gamma^\circ, \varphi^\circ, \ldots$
5. Плоскости проекций обозначаются строчной буквой греческого алфавита π:
   горизонтальная плоскость проекций – π_1,
   фронтальная плоскость проекций – π_2,
   профильная плоскость проекций – π_3.
   При замене плоскостей проекций новые плоскости проекций обозначаются последовательно: $\pi_4, \pi_5, \pi_6, \ldots$
6. Оси проекций обозначаются: $x_{1,2}, y_{1,3}, z_{2,3}$;
   при замене плоскостей проекций – $x_{1,4}, x_{4,5}, x_{5,6}$ или $x_{2,4}, x_{4,5}, x_{5,6}, \ldots$
7. Проекции геометрической фигуры (точки, прямой, плоскости, поверхности) на соответствующую плоскость проекций имеют нижний индекс.
   Например: A_1 – горизонтальная проекция точки A;
   b_2 – фронтальная проекция прямой b;
   α_3 – профильная проекция плоскости α.

1. НАТУРАЛЬНАЯ ВЕЛИЧИНА ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ. УГОЛ НАКЛОНА ПРЯМОЙ К ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИЙ

Через решение задач на определение натуральной величины отрезка прямой решаются все задачи на определение расстояний:

между двумя точками;

от точки до прямой;

между двумя параллельными прямыми;

от точки до плоскости;

между прямой и параллельной ей плоскостью;

между параллельными плоскостями.

Угол между прямой и плоскостью определяется углом, заключенным между прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость.

Задача 1. Определить натуральную величину отрезка *AB* прямой уровня и углы наклона: горизонтали *h* к фронтальной плоскости проекций π_2, фронтали *f* к горизонтальной плоскости проекций π_1 (рис. 1*).

Решение. Из свойств ортогонального проецирования следует, что отрезок прямой уровня проецируется в натуральную величину на ту плоскость проекций, параллельно которой он расположен в пространстве. Тогда натуральная величина отрезка *AB*, принадлежащего горизонтали *h*, определяется его горизонтальной проекцией A_1B_1. Угол $\varphi°$, заключенный между горизонтальной проекцией прямой и осью проекций $x_{1,2}$, определяет наклон прямой *h* к фронтальной плоскости проекций π_2 (рис. 1а).

Натуральная величина отрезка *CD*, принадлежащего фронтали *f*, определяется его фронтальной проекцией C_2D_2. Угол $\gamma°$, заключенный между фронтальной проекцией прямой и осью проекций $x_{1,2}$, определяет наклон прямой *f* к горизонтальной плоскости проекций π_1 (рис. 1б).

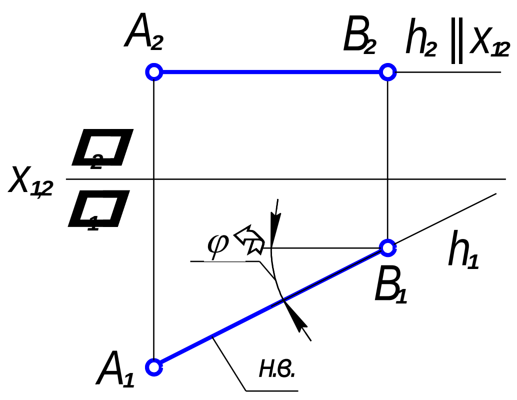


Рис. 1а

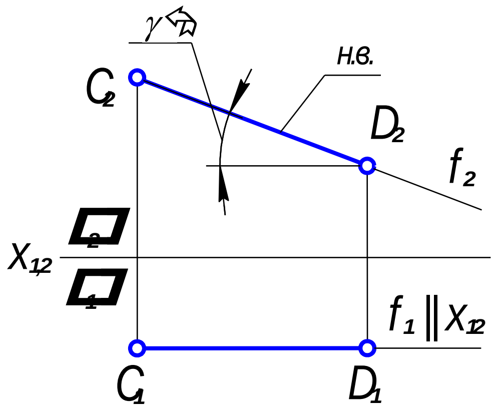


Рис. 1б

Задача 2. Определить натуральную величину отрезка *AB* прямой общего положения *l* и угол наклона прямой к плоскостям проекций π_1 и π_2 (рис. 2а).

Решение. Задача может быть решена:

методом опорного (прямоугольного) треугольника;

методом замены плоскостей проекций;

методом вращения вокруг проецирующей прямой или прямой уровня;

методом плоскопараллельного перемещения.

---

* Порядковый номер задачи соответствует порядковому номеру рисунка, к ней относящемуся.

Методы преобразования чертежа используются с целью преобразования прямой общего положения в прямую уровня.

МЕТОД ОПОРНОГО (ПРЯМОУГОЛЬНОГО) ТРЕУГОЛЬНИКА

Решение задачи заключается в построении прямоугольного треугольника, наглядно изображенного на рис. 2б. Он образуется в результате проецирования отрезка AB на плоскость проекций π_1. В этом треугольнике гипотенуза AB – отрезок в пространстве, катет A_1B_1 – его горизонтальная проекция, катет BB_1 – разность уровней концов отрезка AB относительно плоскости проекций π_1 (разность высот): $\Delta z = z_B – z_A$. Угол γ^o определяет наклон прямой AB к плоскости проекций π_1.

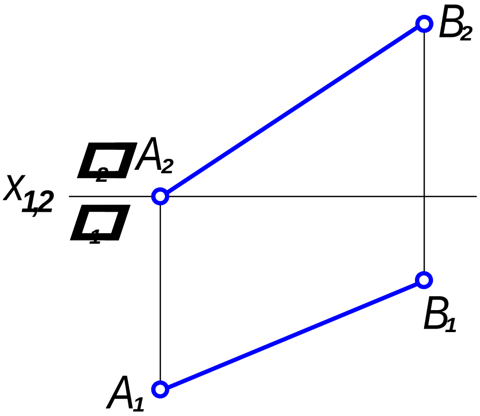


Рис. 2а

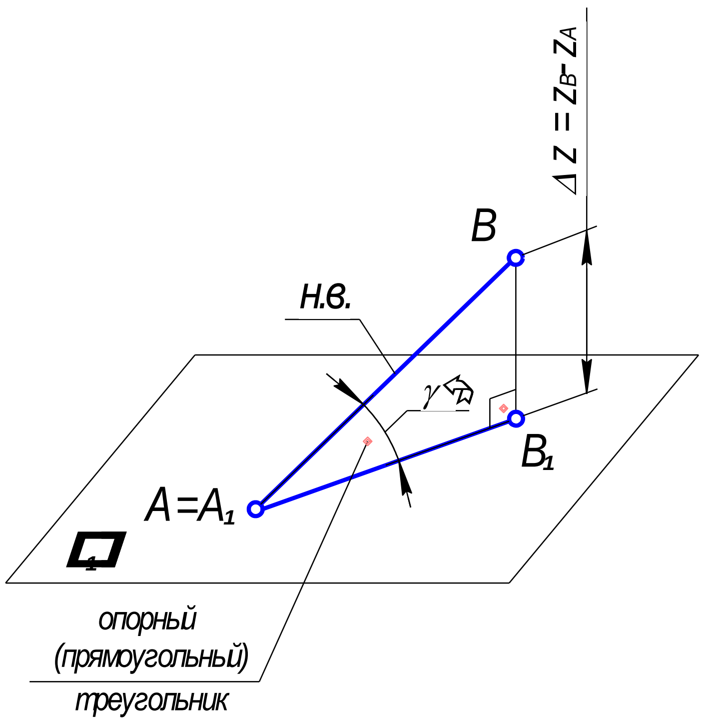


Рис. 2б

На комплексном чертеже (рис. 2в) дано построение рассмотренного опорного треугольника, у которого один катет A_1B_1 – горизонтальная проекция отрезка AB, другой катет $B_1B'_1 = \Delta z$ (разность высот концов отрезка). Тогда гипотенуза $A_1B'_1$ определяет натуральную величину отрезка AB, а угол γ^o – наклон прямой AB к плоскости проекций π_1.

На рис. 2г дано построение опорного треугольника на базе фронтальной проекции A_2B_2 отрезка AB. В этом треугольнике катет A_2B_2 – фронтальная проекция отрезка AB, катет $A_2A'_2 = \Delta y$ – разность глубин концов отрезка AB

($\Delta y = y_B - y_A$), гипотенуза A'_2B_2 – натуральная величина отрезка AB, угол φ^o определяет наклон прямой AB к плоскости проекций π_2.

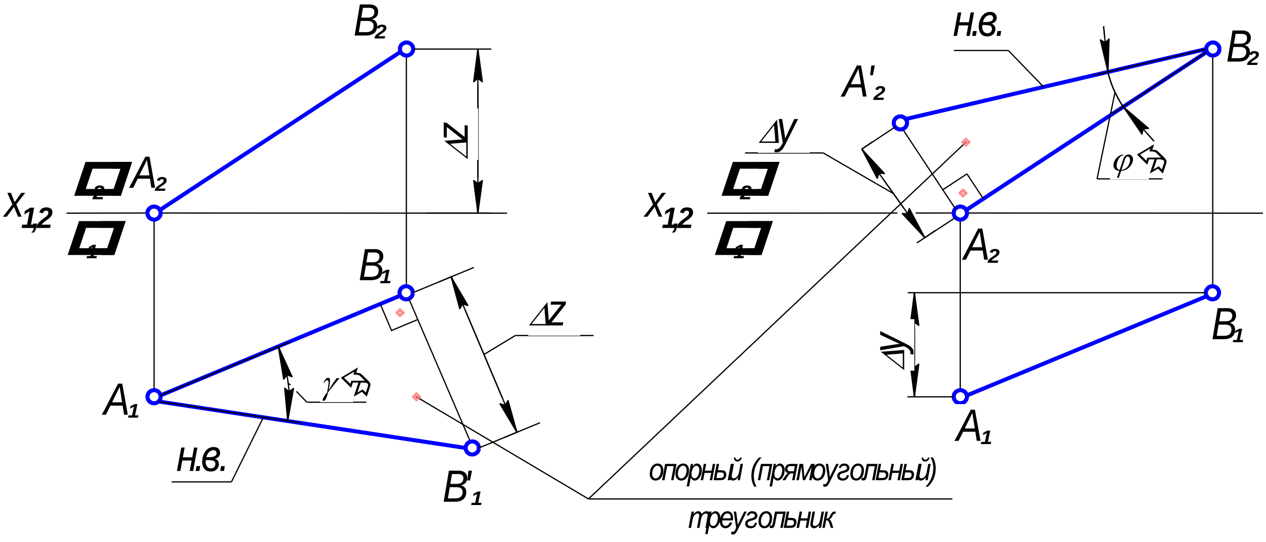


Рис. 2в　　　　　　　　　　Рис. 2г

МЕТОД ЗАМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

Сущность способа замены плоскостей проекций заключается в том, что при неизменном положении точек, линий, плоских фигур в пространстве вводится новая плоскость проекций, перпендикулярная одной из основных, относительно которой геометрический объект займет частное положение.

На рис. 2д и 2е выполнено преобразование прямой общего положения l (l_1, l_2) в прямую уровня.

На рис. 2д в систему плоскостей π_1 / π_2 введена новая плоскость проекций $\pi_4 \perp \pi_1$ и $\pi_4 \parallel AB$, новая ось $x_{14} \parallel A_1B_1$. Определено положение точек в новой системе плоскостей проекций π_1 / π_4. Для этого через горизонтальные проекции точек A_1 и B_1 проведены линии связи, перпендикулярные новой оси x_{14}. Расстояние от новой оси до новой проекции точки должно равняться расстоянию от предыдущей оси до заменяемой (преобразуемой) проекции точки.

В системе плоскостей проекций π_1 / π_4 прямая l (l_1, l_4) – прямая уровня ($l \parallel \pi_4$). Тогда натуральная величина отрезка AB определяется отрезком A_4B_4 (рис. 2д).

В системе плоскостей проекций π_2 / π_5 прямая l (l_2, l_5) – прямая уровня (рис. 2е). Следовательно, натуральная величина отрезка AB определяется отрезком A_5B_5. Углы γ^o и φ^o определяют наклон прямой l соответственно к плоскостям проекций π_1 и π_2.

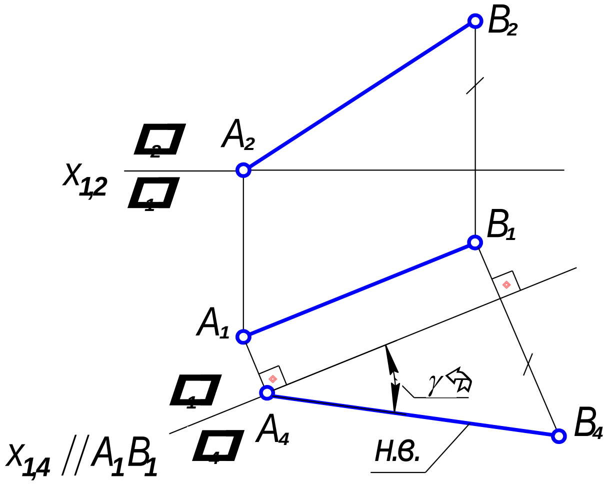


Рис. 2д

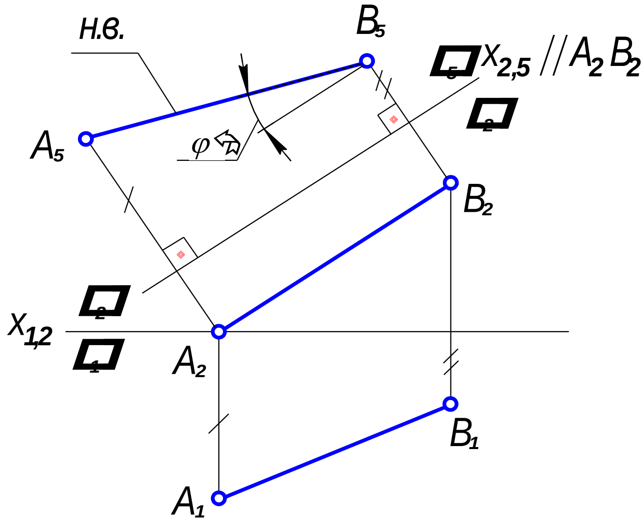


Рис. 2е

МЕТОД ВРАЩЕНИЯ ВОКРУГ ПРЯМЫХ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ

Сущность способа заключается в изменении положения прямой линии или плоской фигуры путем поворота вокруг некоторой прямой частного положения (проецирующей прямой или прямой уровня) так, чтобы прямая или фигура оказались в частном положении относительно неизменной системы плоскостей проекций π_1 / π_2.

Метод вращения вокруг проецирующей прямой

Пусть ось вращения перпендикулярна плоскости π_1 ($i \perp \pi_1$) и проходит через точку B (рис. 2ж). Вращаем прямую l до положения, когда ее горизонтальная проекция l_1 станет параллельной оси проекций $x_{1,2}$ (рис. 2и). Тогда прямая l (l'_1, l'_2) станет фронталью, и натуральная величина отрезка AB определится отрезком A'_2B_2. Угол $\gamma°$ – это угол наклона прямой l к плоскости проекций π_1.

МЕТОД ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Сущность способа заключается в том, что плоскости проекций π_1 и π_2 остаются неподвижными в пространстве, а геометрический объект перемещается относительно плоскости проекций так, что каждая его точка перемещается параллельно одной из плоскостей проекций. Достаточно лишь, не изменяя вида и величины одной из проекций рассматриваемой фигуры, переместить эту проекцию в требуемое положение, а затем построить вторую проекцию, используя линии связи.

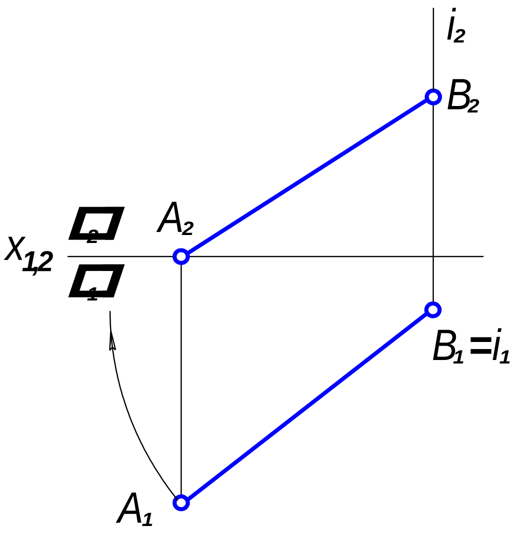


Рис. 2ж

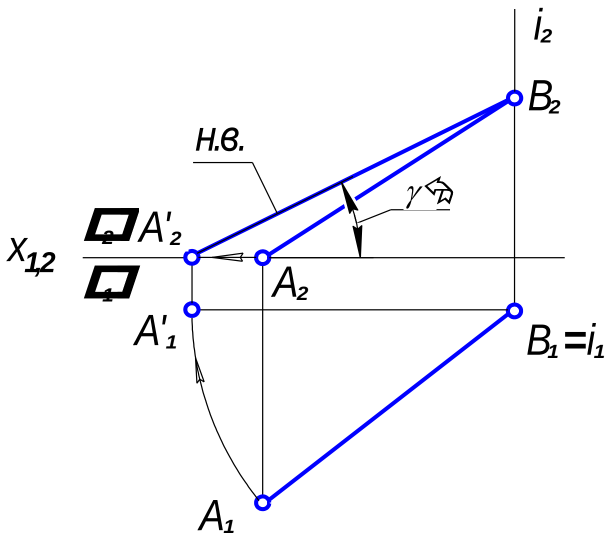


Рис. 2и

На рис. 2к в результате плоскопараллельного перемещения прямая l (l'_1, l'_2) общего положения преобразована в горизонтальную прямую ($l'_2 \parallel x_{12}$). В результате отрезок $A'_1B'_1$ определяет натуральную величину отрезка AB прямой l.

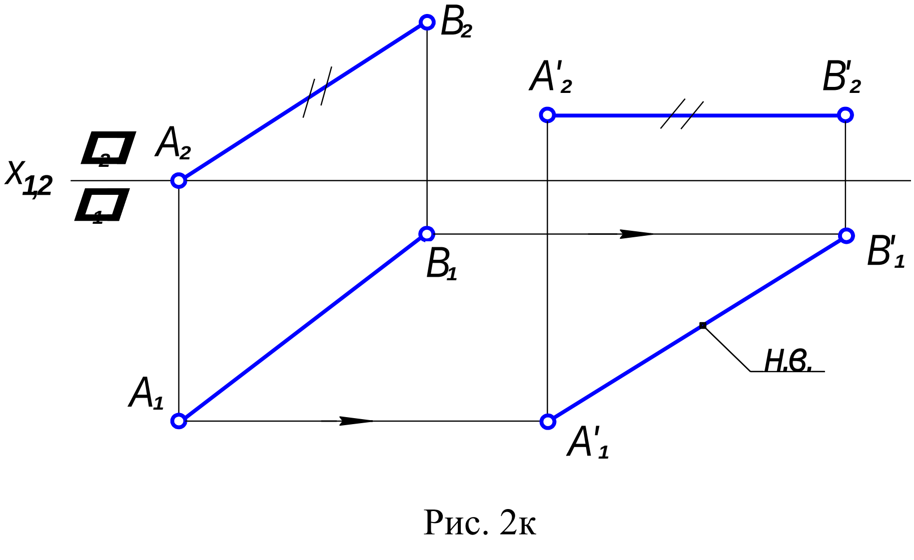


Рис. 2к

2. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ПРЯМОГО УГЛА

Ортогональной проекцией прямого угла на данную плоскость проекций является прямой угол в том случае, если одна из его сторон параллельна данной плоскости проекций, а другая не перпендикулярна ей (рис. 3а).

$AC \perp AB,\ AB \parallel \pi_1,\ AC \perp \pi_1 \quad \Rightarrow \quad A_1C_1 \perp A_1B_1.$

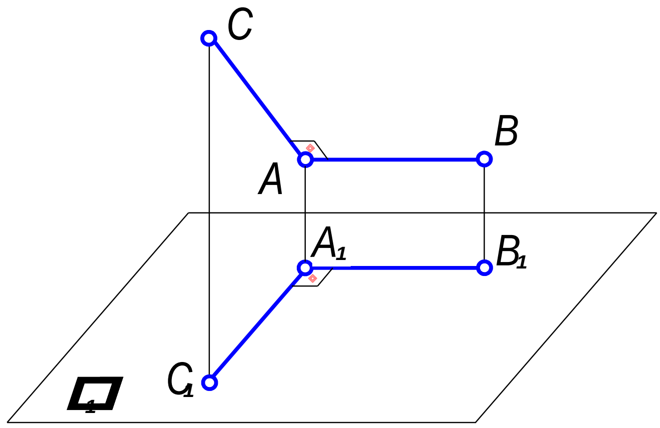


Рис. 3а

Следовательно, на комплексном чертеже:

- прямой угол проецируется без искажения на горизонтальную плоскость проекций π_1, если одна из его сторон является горизонталью (рис. 3б);

- прямой угол проецируется без искажения на фронтальную плоскость проекций π_2, если одна из его сторон является фронталью (рис. 3в).

При построении перпендикуляра p из точки A к горизонтали h проводим $p_1 \perp h_1$ (рис. 3б), фиксируем точку $B_1 = p_1 \cap h_1$, находим ее фронтальную проекцию $B_2 \in h_2$ и, соединив точки A_2 и B_2, получаем фронтальную проекцию p_2 прямой $p \perp h$.

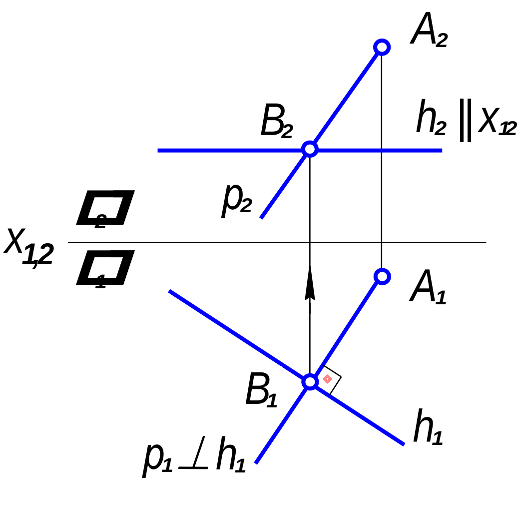


Рис. 3б

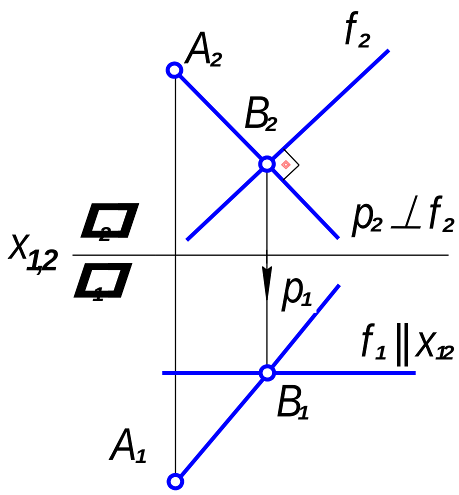


Рис. 3в

Аналогично решается задача на построение прямой p, перпендикулярной фронтали f: $p_2 \perp f_2$, $B_2 = p_2 \cap f_2$, $B_1 \in f_1 \Rightarrow A_1B_1 = p_1$ (рис. 3в).

Из рис. 3б и 3в очевидно, что перпендикуляр, проведенный из данной точки на прямую уровня, в системе плоскостей π_1 / π_2 является прямой общего положения.

На рис. 4а и 4б дано построение перпендикуляра из точки на проецирующую прямую. Проецирующая прямая является одновременно и прямой уровня: $l \perp \pi_2$ – горизонтальная прямая, $k \perp \pi_1$ – фронтальная прямая. По чертежу понятно, что перпендикуляр на проецирующую прямую является прямой уровня, $AB \perp l$ – фронталь, $CD \perp k$ – горизонталь.

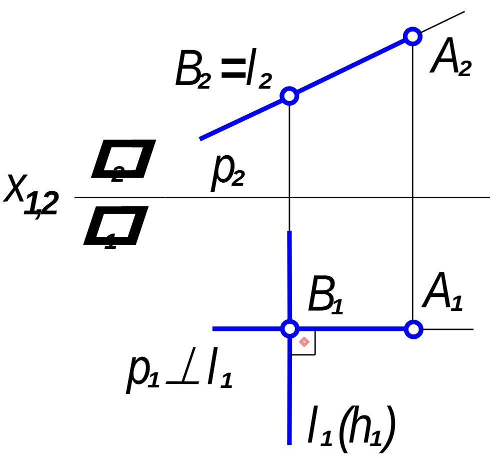


Рис. 4а

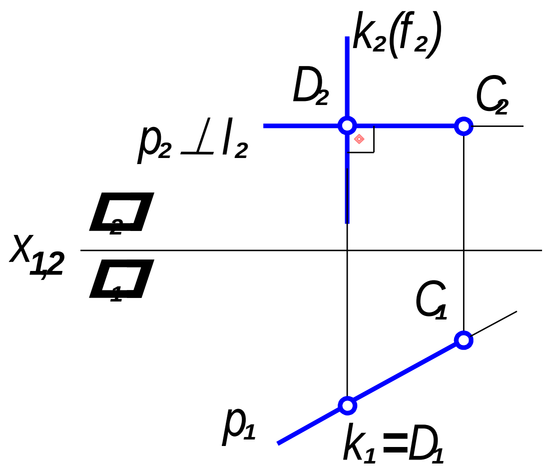


Рис. 4б

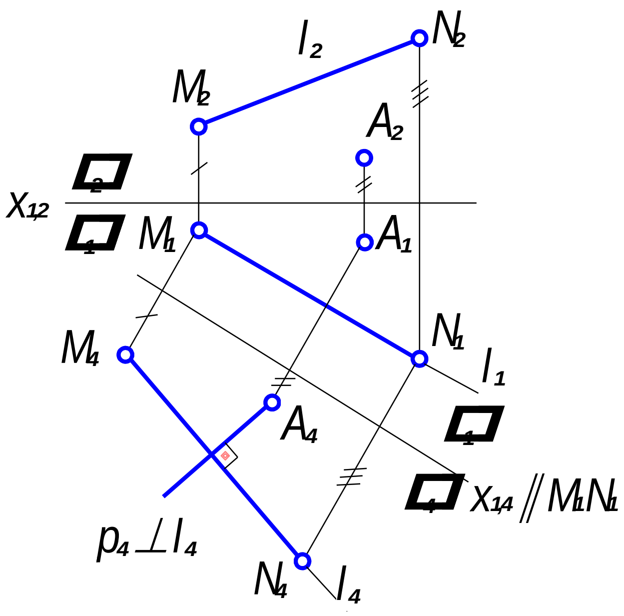


Рис. 5а

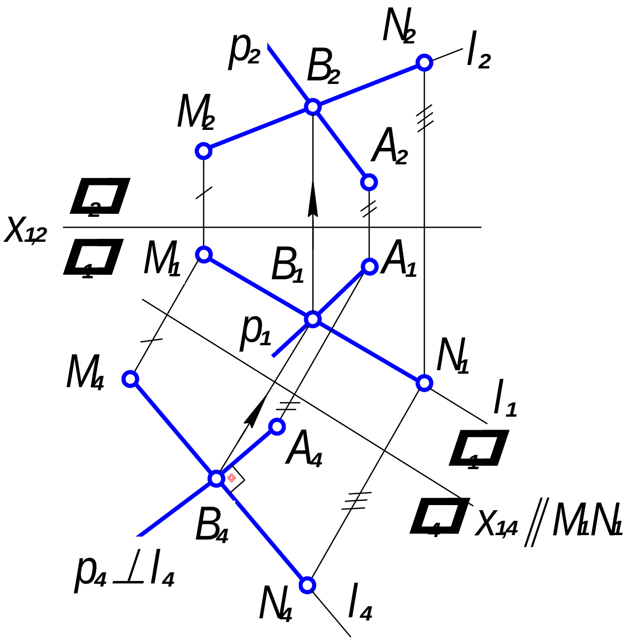


Рис. 5б

Для построения перпендикуляра p из точки A на прямую общего положения MN следует обязательно преобразовать прямую общего положения MN в прямую уровня и далее решать задачу в соответствии с рис. 5а и 5б: $p_4 \perp l_4$, $B_4 = p_4 \cap l_4$, $B_1 \in l_1 \Rightarrow p_1$, $B_2 \in l_2 \Rightarrow A_2B_2 = p_2$.

В системах плоскостей проекций π_1 / π_2 и π_1 / π_4 перпендикуляр p из точки A на прямую общего положения MN является прямой общего положения.

3. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ ЛИНИИ

Данное расстояние определяется длиной перпендикуляра, проведенного из точки к данной прямой.

Задача 6. Определить натуральную величину расстояния от точки A до фронтально проецирующей прямой l (рис. 6а).

Решение. Так как перпендикуляр, проведенный из точки A на фронтально проецирующую прямую, является фронталью, то натуральная величина искомого расстояния определяется фронтальной проекцией A_2B_2 отрезка AB (рис. 6б).

Следовательно, расстояние от точки A до проецирующей прямой l определяется отрезком прямой, соединяющим проекцию точки A_2 и вырожденную проекцию прямой l_2.

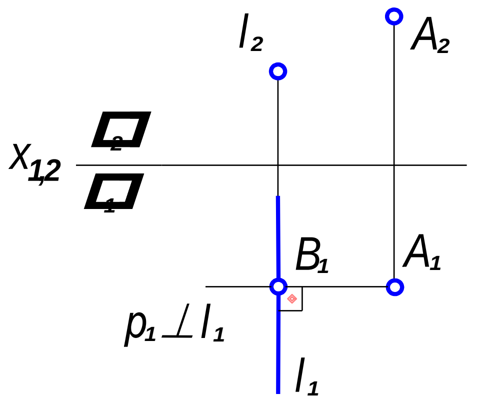


Рис. 6а

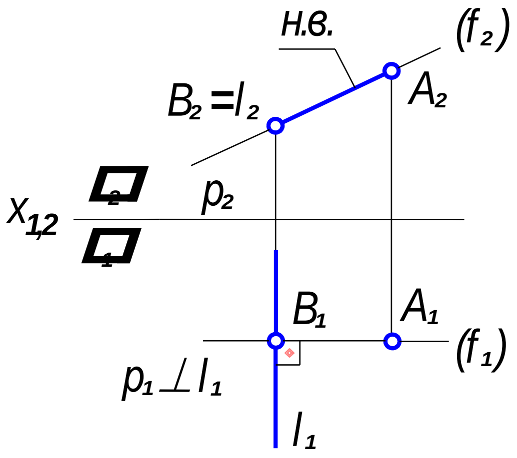


Рис. 6б

Задача 7а. Определить натуральную величину расстояния от точки A до фронтали f (рис. 7а).

Решение. 1. Строим $p \perp f \Rightarrow p_2 \perp f_2$, фиксируем точку $B_2 = p_2 \cap f_2$.

2. Определяем $B_1 \in f_1 \Rightarrow A_1B_1 = p_1$ (рис. 7б).

3. Получаем A_1B_1, A_2B_2 проекции искомого расстояния.

4. Находим его натуральную величину, например, методом опорного треугольника (рис. 7б).

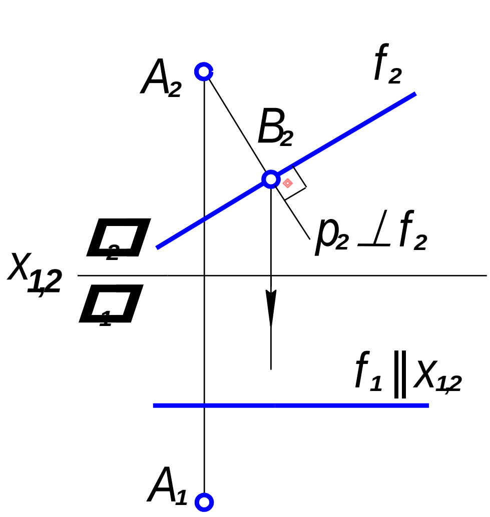


Рис. 7а

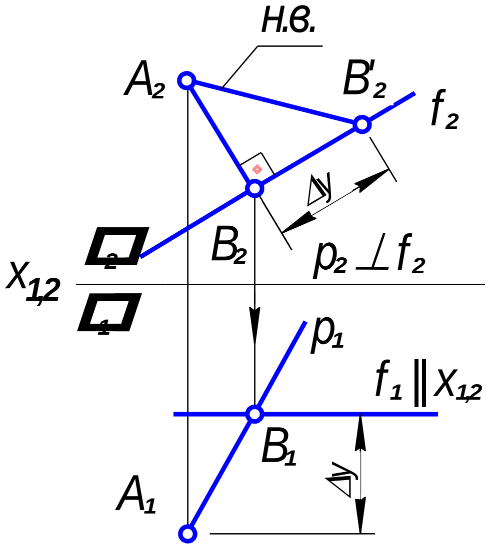


Рис. 7б

Задача 7в. Определить натуральную величину расстояния от точки A до горизонтали h (рис.7в).

Решение. 1. Строим $p \perp h \Rightarrow p_1 \perp h_1$, фиксируем точку $B_1 = p_1 \cap h_1$.

2. Определяем $B_2 \in h_2 \Rightarrow A_2B_2 = p_2$ (рис. 7г).

3. Получаем A_1B_1, A_2B_2 проекции искомого расстояния.

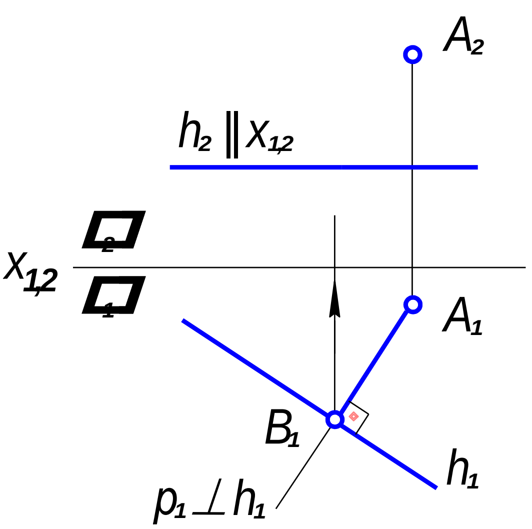


Рис. 7в

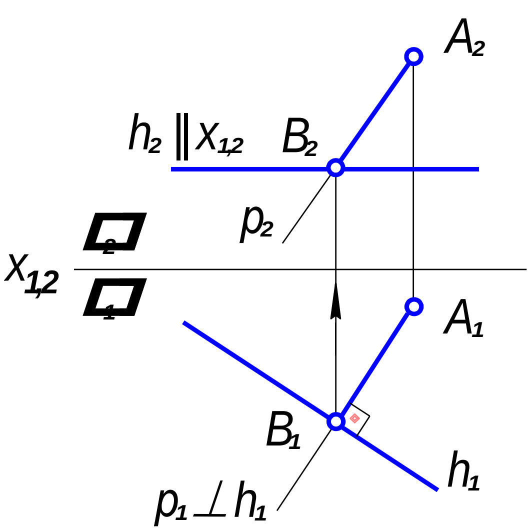


Рис. 7г

Находим его натуральную величину, например, методом замены плоскостей проекций. В результате натуральная величина расстояния от точки до прямой определяется отрезком A_4B_4, соединяющим точку A_4 с вырожденной проекцией h_4 прямой h (рис. 7д).

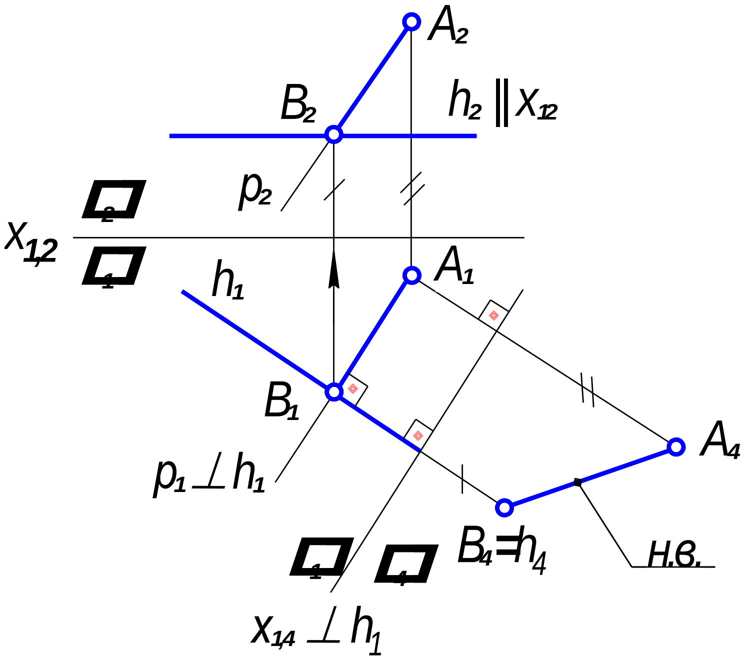


Рис. 7д

Задача 8. Определить натуральную величину расстояния от точки A до прямой общего положения l (рис. 8а).

Решение. 1. Методом замены плоскостей проекций $\pi_1 / \pi_2 \rightarrow \pi_1 / \pi_4 \rightarrow$ $\rightarrow \pi_4 / \pi_5$ преобразуем прямую l в проецирующую.

2. Соединяем точку A_5 с вырожденной проекцией l_5 прямой l и получаем натуральную величину A_5B_5 искомого расстояния AB (рис. 8а).

3. Обратным проецированием строим дополнительную A_4B_4, а также горизонтальную A_1B_1 и фронтальную A_2B_2 проекции расстояния от точки A до прямой l (рис. 8б).

На рис. 8в и 8г показано решение той же задачи с использованием другой замены плоскостей проекций при преобразовании прямой:

$\pi_1 / \pi_2 \rightarrow \pi_2 / \pi_4 \rightarrow \pi_4 / \pi_5$

Задача 9. Определить натуральную величину расстояния между параллельными прямыми m и n (рис. 9а).

Решение. Искомое расстояние определяется длиной перпендикуляра, проведенного из любой точки, взятой на одной прямой, до другой прямой, т.е.

решение осуществляется аналогично предыдущей задаче. На рис. 9б определено расстояние от точки $A \in n$ до прямой общего положения m.

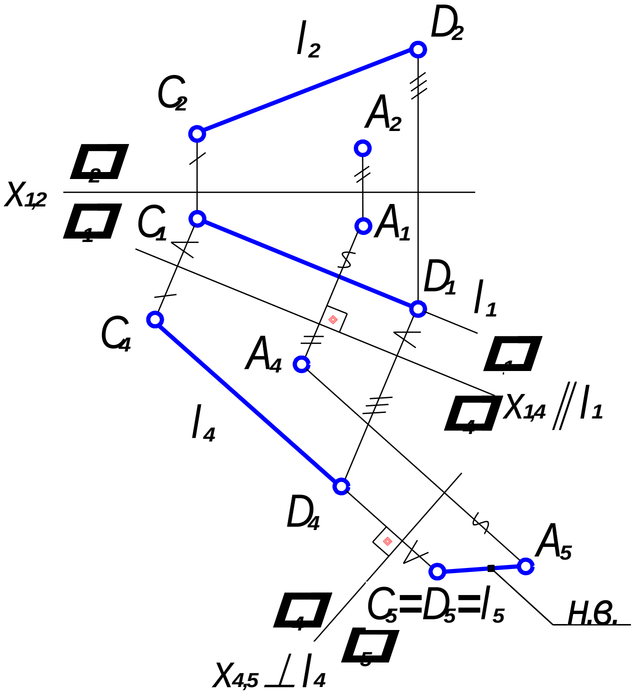


Рис. 8а

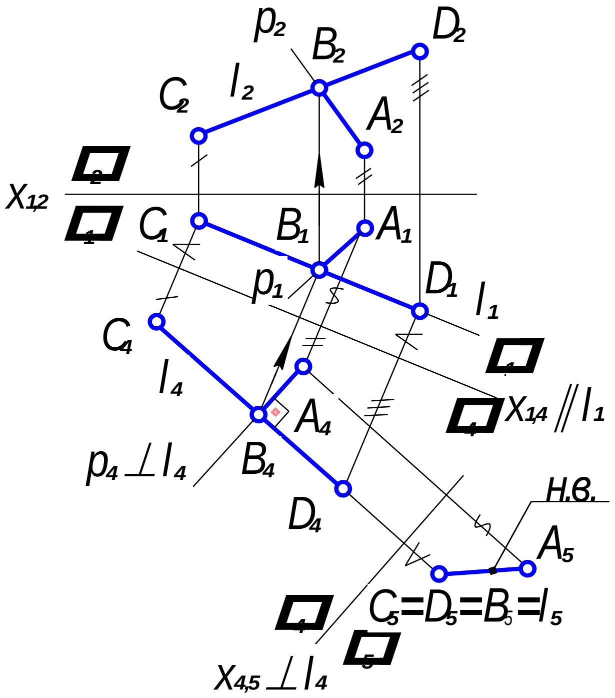


Рис. 8б

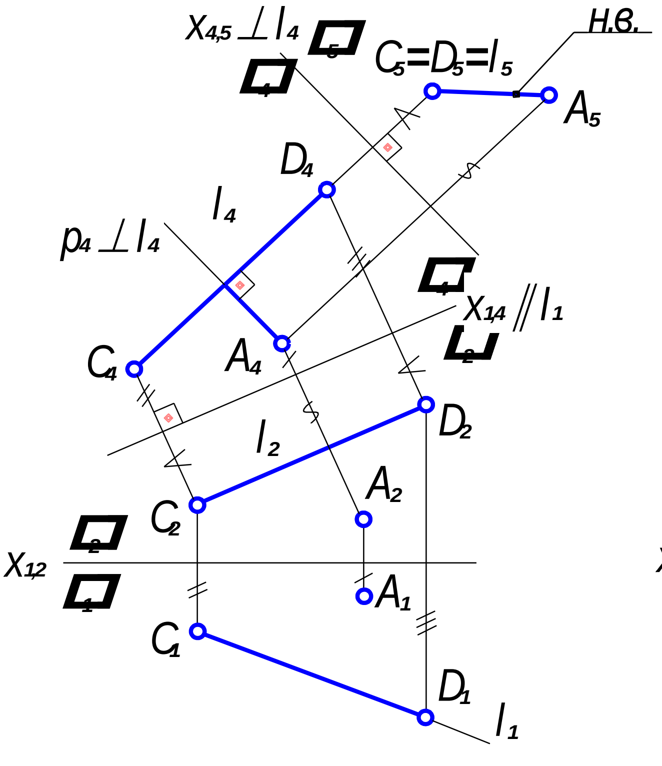


Рис. 8в

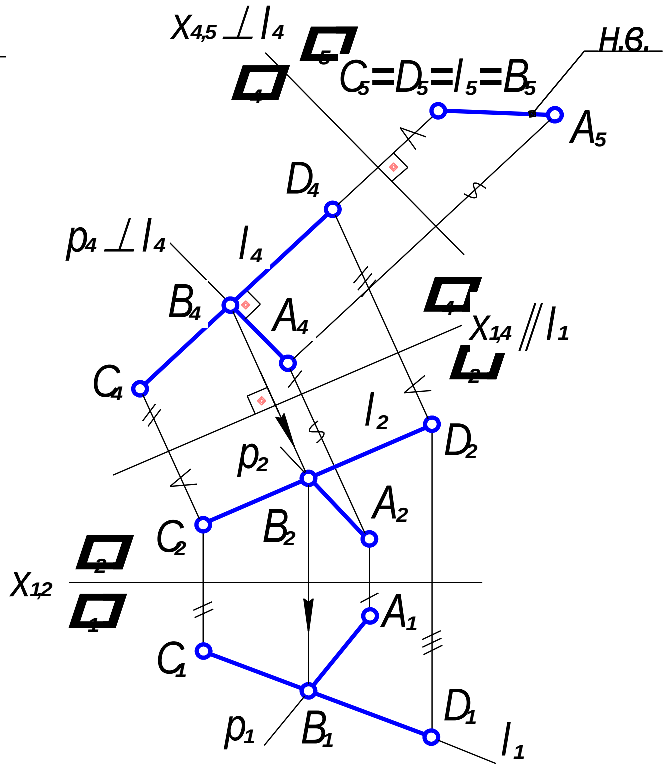


Рис. 8г

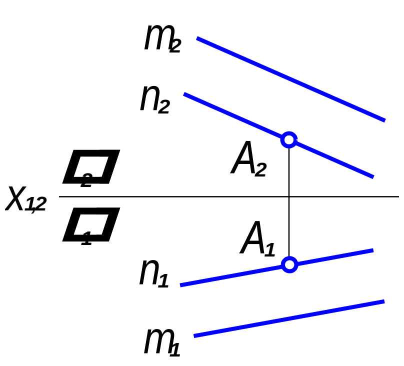


Рис. 9а

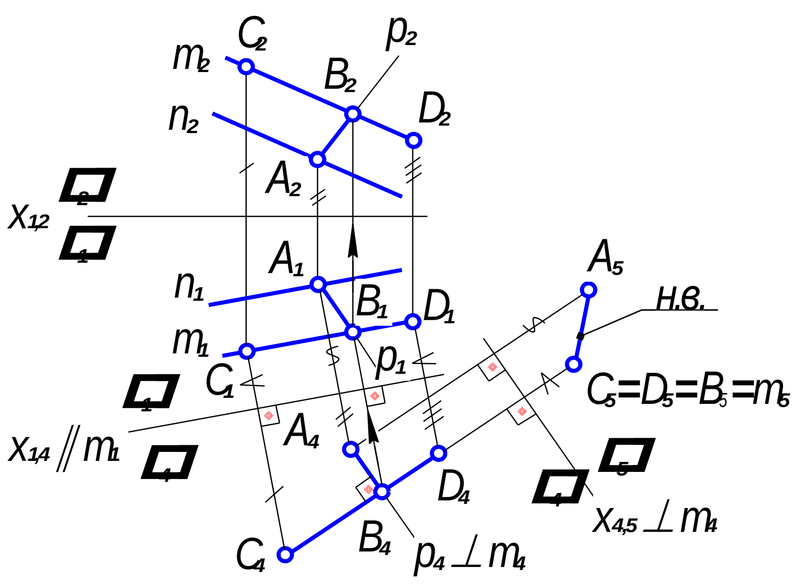


Рис. 9б

Задача 10. Определить натуральную величину расстояния между скрещивающимися прямыми *AB* и *CD* (рис. 10а).

Решение. Искомое расстояние определяется длиной отрезка прямой, пересекающей обе скрещивающиеся прямые и перпендикулярной к ним (рис. 10б, в).

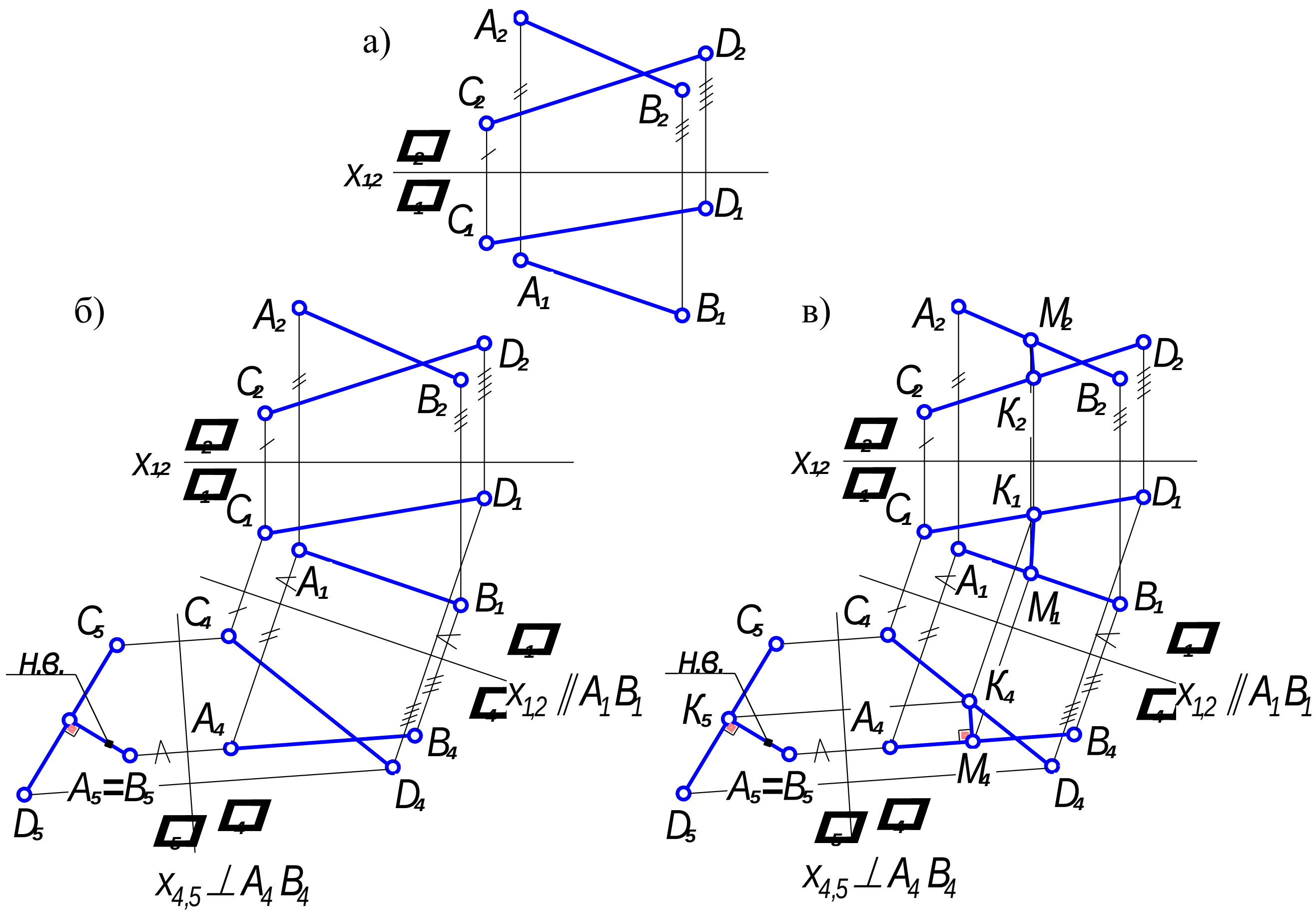


Рис. 10

4. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ПРЯМОЙ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ ПЛОСКОСТИ

В пространстве прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым этой плоскости. В качестве таких прямых используют горизонталь и фронталь плоскости.

На комплексном чертеже прямая перпендикулярна к плоскости, если ее горизонтальная проекция перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали, а фронтальная проекция перпендикулярна фронтальной проекции фронтали этой плоскости: $p_1 \perp h_1,\ p_2 \perp f_2 \Rightarrow p \perp \alpha$.

В соответствии с этим условием для построения перпендикуляра из точки C к заданной плоскости α сначала в этой плоскости строят прямые уровня h и f (рис. 11а), а затем – проекции перпендикуляра p (рис. 11б).

Алгоритм графического решения задачи:

1. Проводим $h_2 \parallel x_{1,2}$, $C_2 \in h_2$, фиксируем $1_2 = h_2 \cap A_2B_2$, определяем $1_1 \in A_1B_1 \Rightarrow 1_1C_1 = h_1$.
2. Проводим $f_1 \parallel x_{1,2}$, $C_1 \in f_1$, фиксируем $2_1 = f_1 \cap A_1B_1$, определяем $2_2 \in A_2B_2 \Rightarrow 2_2C_2 = f_2$.
3. Строим проекции перпендикуляра $p_2 \perp f_2$, $p_1 \perp h_1$.

В результате получаем горизонтальную p_1 и фронтальную p_2 проекции прямой p, проходящей через точку C перпендикулярно плоскости α (ΔABC).

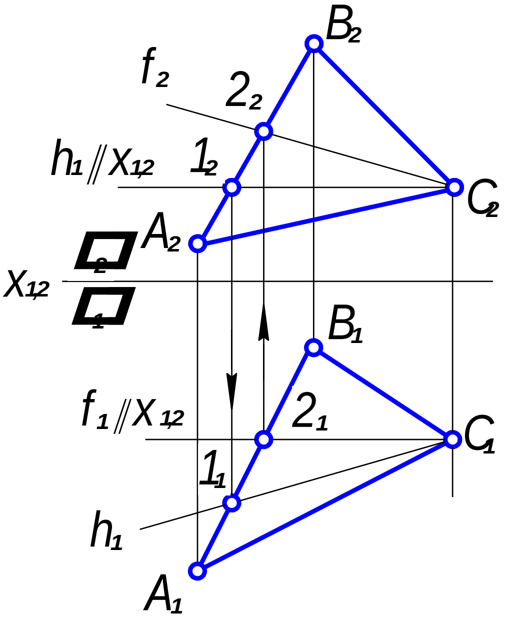


Рис. 11а

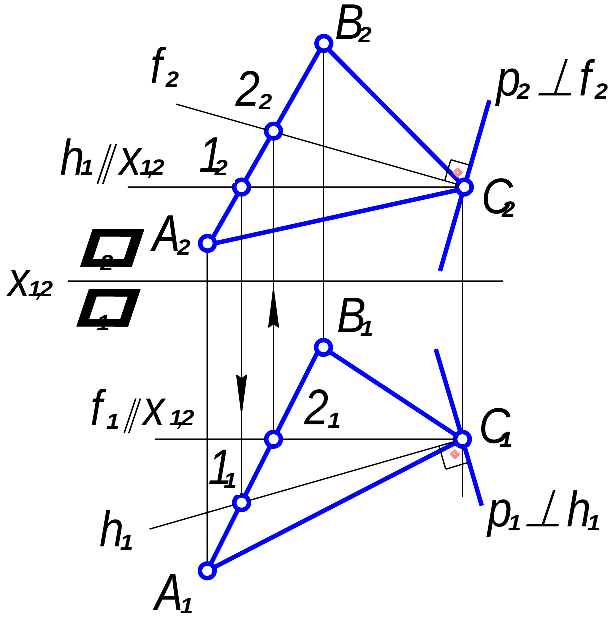


Рис. 11б

На рис. 11в и 11г аналогичным образом построен перпендикуляр из точки A к плоскости β ($m \cap n$) (основание перпендикуляра на данном чертеже не определялось).

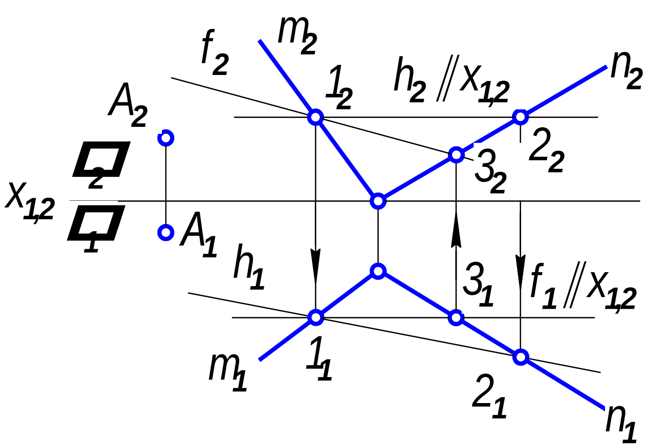


Рис. 11в

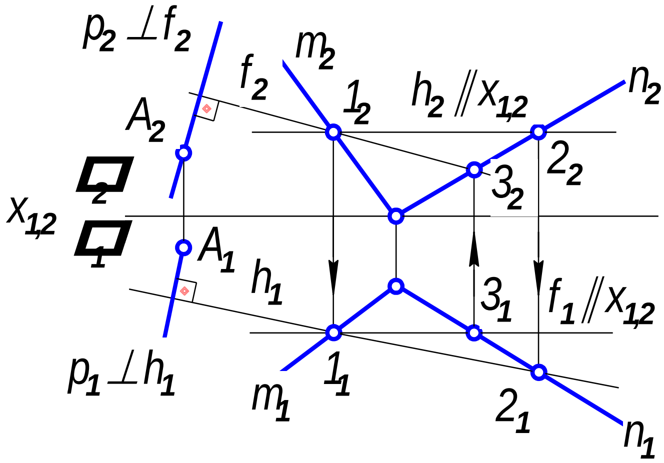


Рис. 11г

На рис. 11д построен перпендикуляр из точки $A \notin \alpha$ (α_1, α_2), заданной следами. Следы плоскости являются прямыми уровня нулевого порядка (т.е. прямыми уровня, принадлежащими плоскостям проекций π_1 и π_2), поэтому перпендикуляр строится к следам $p_1 \perp \alpha_1$, $p_2 \perp \alpha_2$.

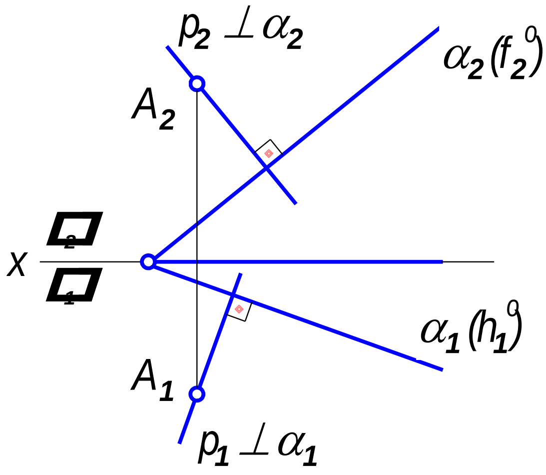


Рис. 11д

На рис. 12а, б, в дано построение перпендикуляра к горизонтально проецирующей плоскости. Аналогично строится перпендикуляр и к фронтально проецирующей плоскости (рис. 12г).

Из рис. 12в и 12г видно, что перпендикуляр к проецирующей плоскости является прямой уровня: перпендикуляр на горизонтально проецирующую плоскость является горизонталью, на фронтально проецирующую плоскость – фронталью. Следовательно, расстояние от точки до плоскости определяется длиной перпендикуляра (A_1B_1 на рис. 11в и A_2B_2 на рис. 12г), проведенного из соответствующей точки на вырожденную проекцию плоскости.

Угол φ на рис. 12в – это угол наклона плоскости α к фронтальной плоскости проекций π_2, а угол γ на рис. 12г – угол наклона плоскости β к горизонтальной плоскости проекций π_1.

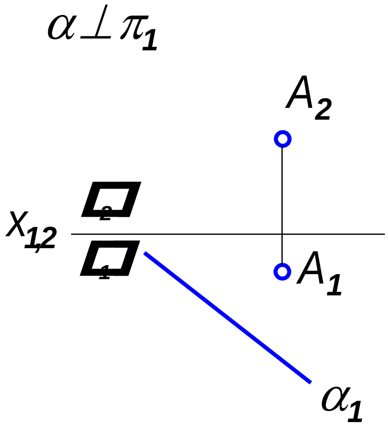


Рис. 12а

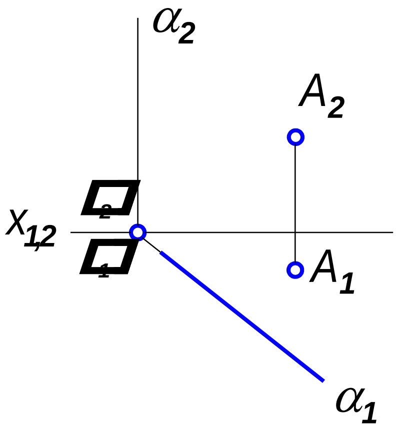


Рис. 12б

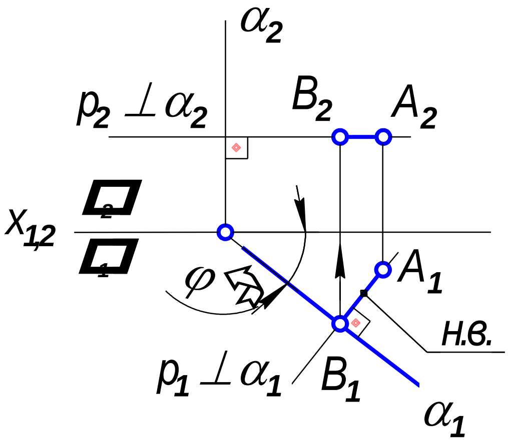


Рис. 12в

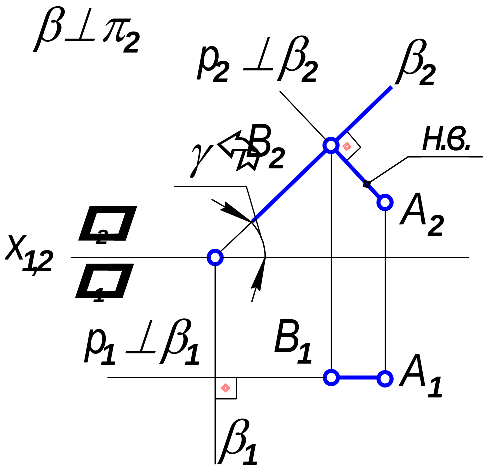


Рис. 12г

5. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

Задача 13. Определить натуральную величину расстояния от точки D до плоскости общего положения α (ΔABC) (в определитель плоскости входят прямые уровня: $AC = h$ и $AB = f$).

Решение. 1. Методом замены плоскостей проекций данную плоскость α общего положения преобразуем в проецирующую $\pi_1 / \pi_2 \rightarrow \pi_1 / \pi_4$. Для этого проводим новую ось $x_{1,4} \perp h_1$. При этом плоскость α (ΔABC) спроецируется на π_4 в прямую линию.

2. Определяем искомое расстояние D_4M_4, то есть длину перпендикуляра p_4, проведенного из точки D_4 на вырожденную проекцию α_4 плоскости α (рис. 13а).

3. Обратным построением находим горизонтальную проекцию D_1M_1 отрезка DM: проводим $p_1 \perp h_1$, фиксируем $M_1 \in p_1$ и получаем D_1M_1.

4. Строим фронтальную проекцию D_2M_2 отрезка DM: проводим $p_2 \perp f_2$, фиксируем $M_2 \in p_2$ и получаем D_2M_2 (рис. 13б).

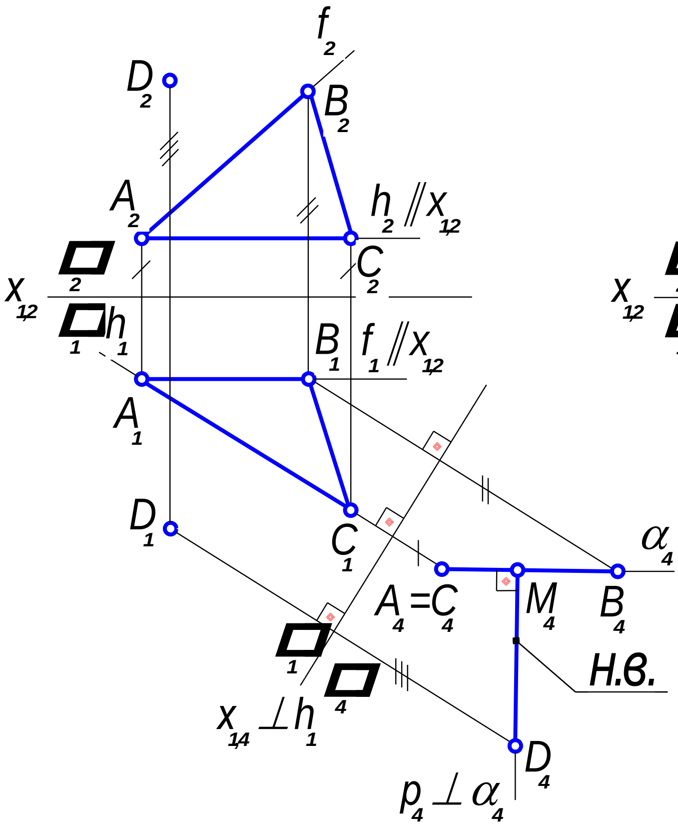


Рис. 13а

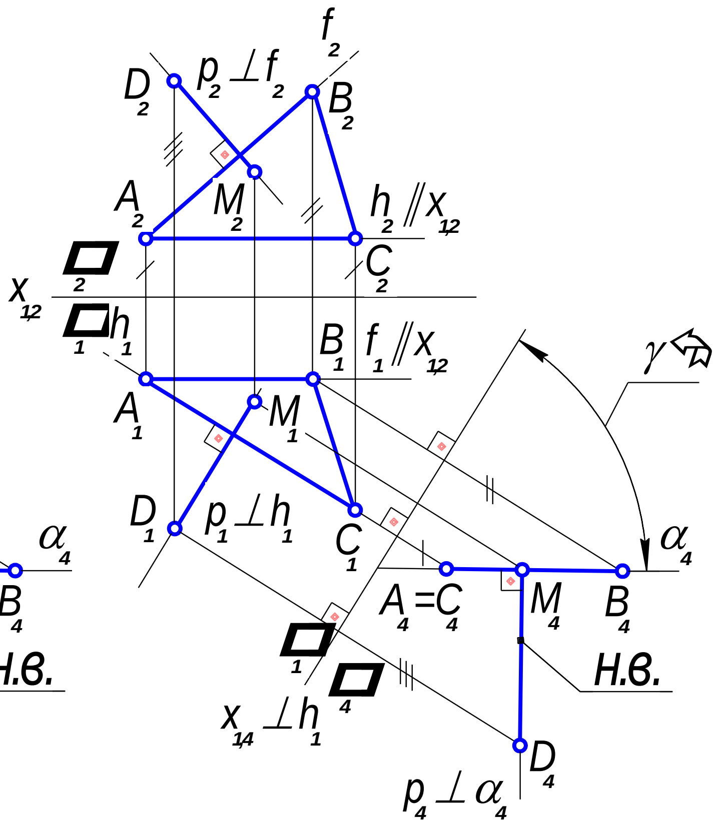


Рис. 13б

На рис. 14 решена такая же задача, но плоскость задана следами (т.е. прямыми уровня, принадлежащими плоскостям проекций π_1 и π_2).

На рис. 15а, б решена задача на определение расстояния от точки до плоскости общего положения, причем в плоскости не заданы прямые уровня. Ее решение отличается от предыдущего тем, что сначала надо в плоскости α (ΔABC) построить прямые уровня h и f.

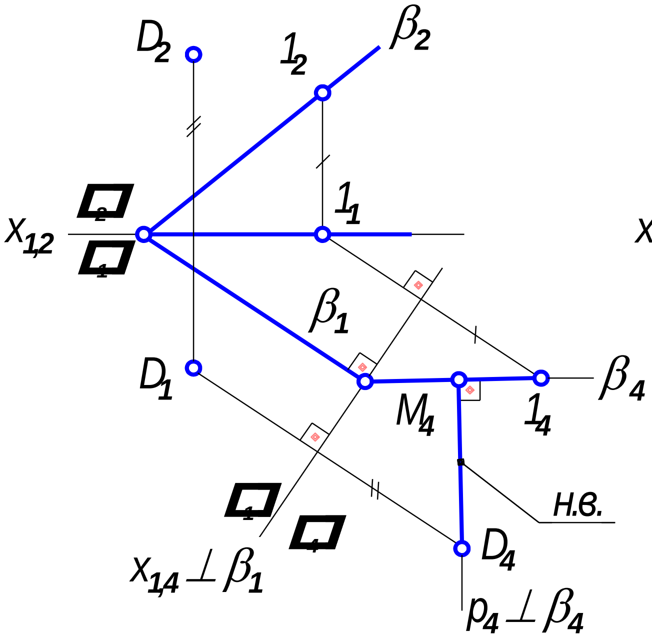


Рис. 14а

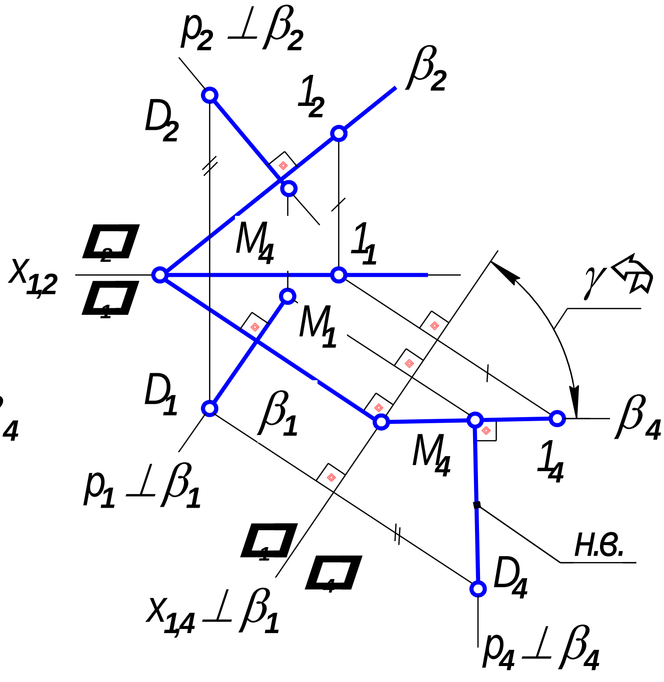


Рис. 14б

Та же задача на рис. 16 решена преобразованием плоскости в проецирующую с использованием фронтали плоскости: $\pi_1 / \pi_2 \rightarrow \pi_2 / \pi_4$.

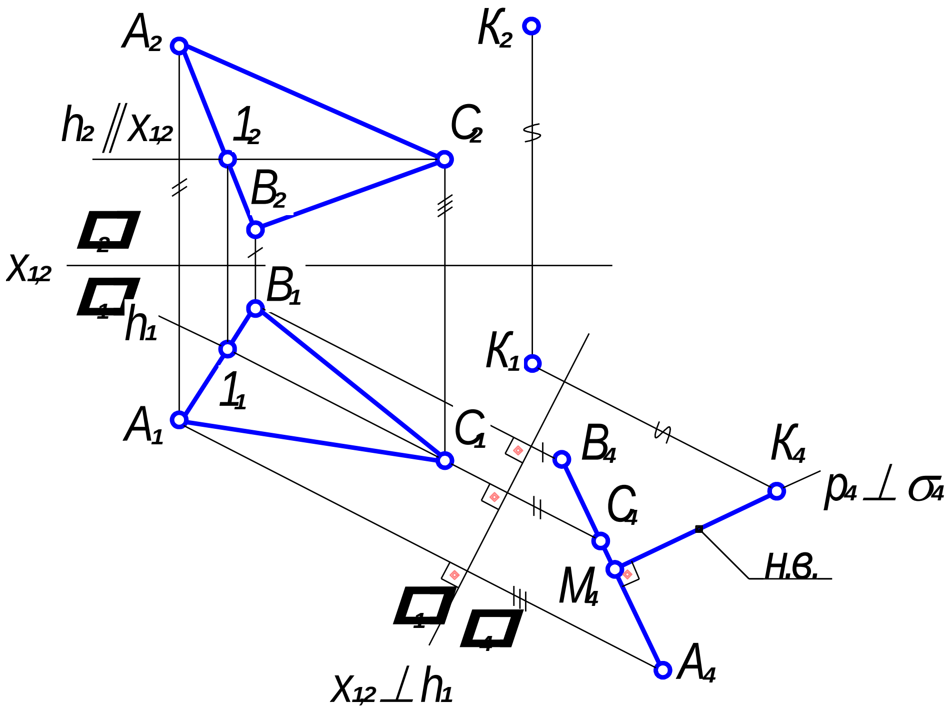


Рис. 15а

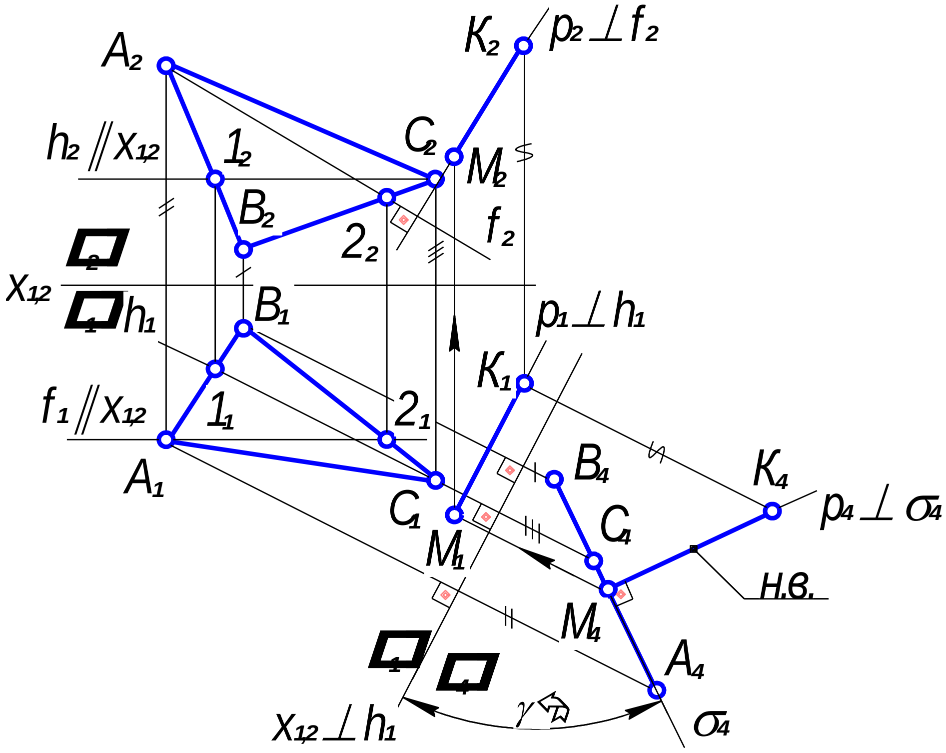


Рис. 15б

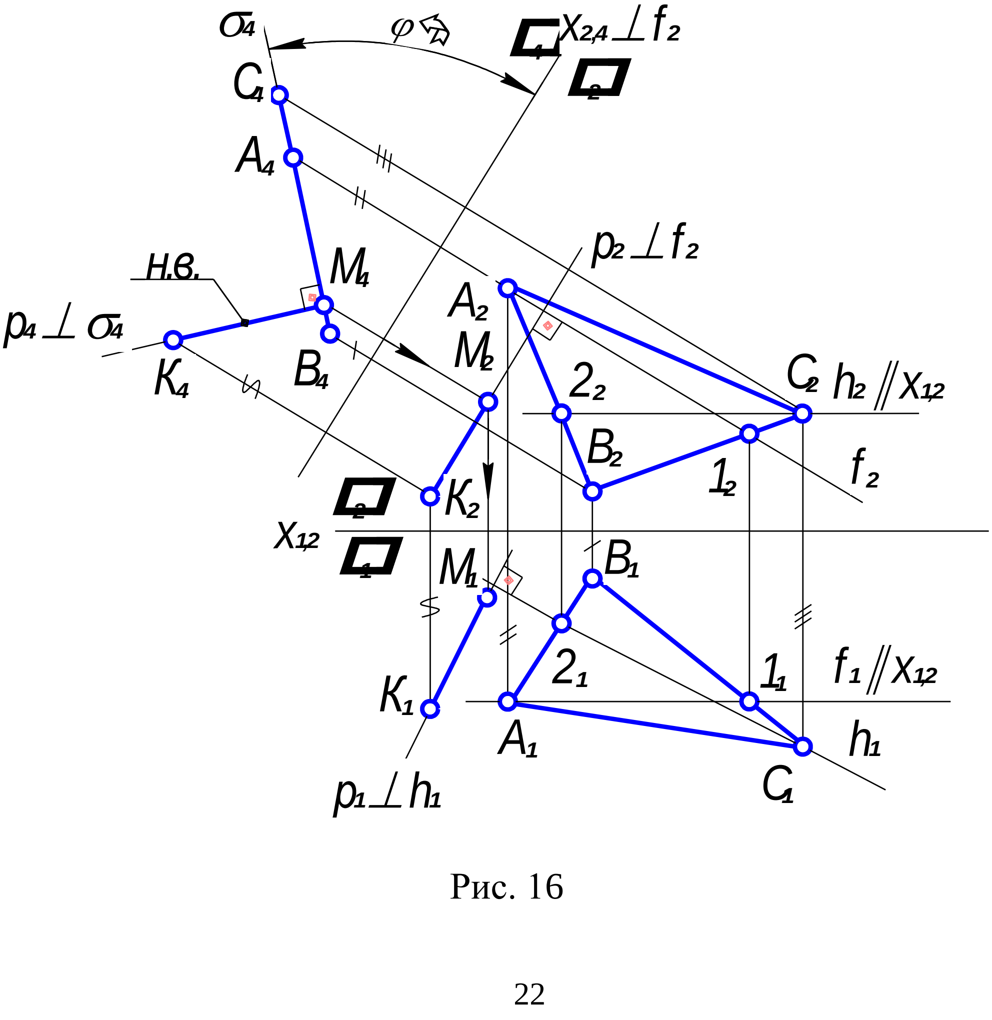


Рис. 16

На рис. 17 аналогичная задача решена способом плоскопараллельного перемещения. Для решения задачи плоскость α (Δ*ABC*) преобразовали во фронтально проецирующую. Алгоритм решения задачи:

1. В плоскости α (Δ*ABC*) строим горизонталь *h*.

2. Горизонтальную проекцию горизонтали h_1 располагаем перпендикулярно оси $x_{1,2}$, перемещаем Δ *ABC,* сохраняя размеры и форму $\Delta\, A_1B_1C_1 = \Delta\, A'_1B'_1C'_1$. Положение проекций A'_1, C'_1 и D'_1 определяем засечками (например, из B'_1 проводим дугу радиуса $R = A_1B_1$, из 1_1 проводим дугу радиуса $R = A_11_1$, на пересечении находим A'_1).

3. Проекции $\Delta\, A'_2B'_2C'_2$ и D'_2 строим по линиям связи. Из D'_2 опускаем перпендикуляр на вырожденную проекцию плоскости, длина перпендикуляра и есть натуральная величина расстояния от точки *D* до α (Δ*ABC*).

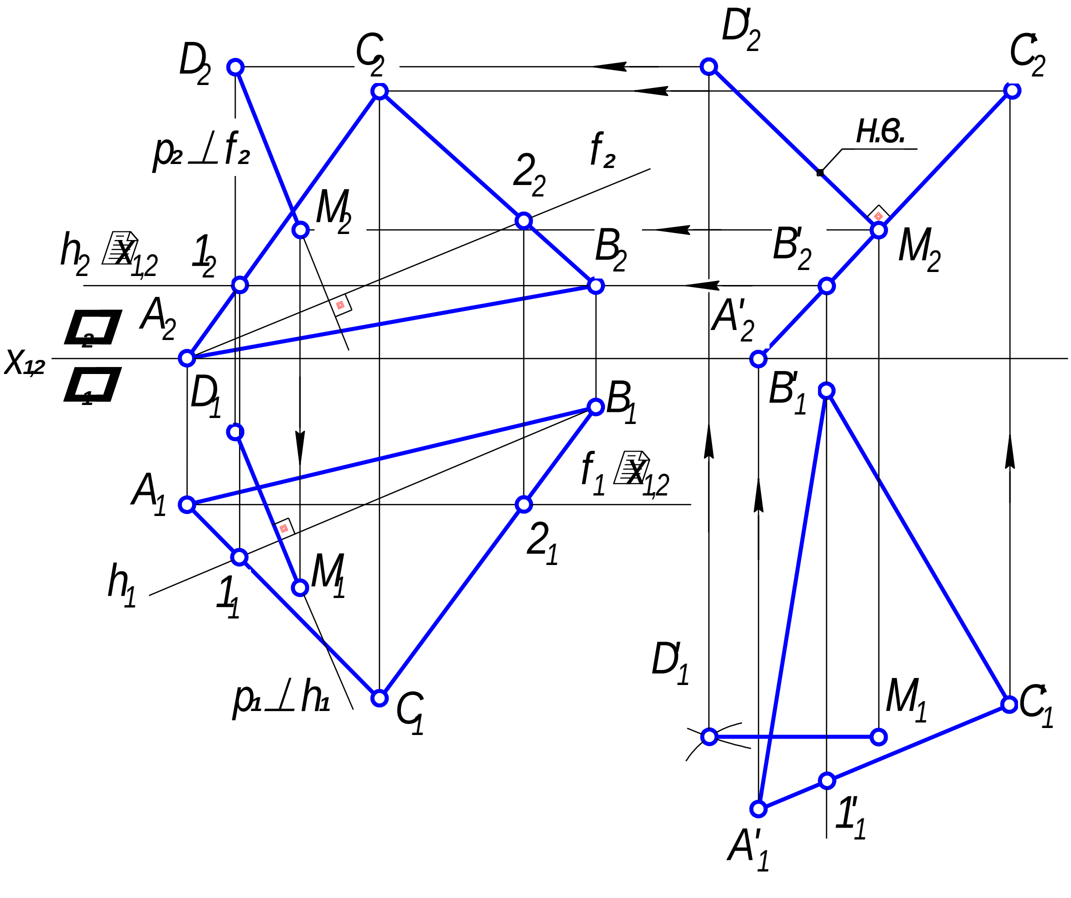


Рис. 17

Задача 18. Определить натуральную величину расстояния от прямой *l* до параллельной ей плоскости α (Δ*ABC*) (рис. 18).

Решение. Расстояние определяется длиной перпендикуляра *p*, опущенного из произвольно выбранной точки *К*, принадлежащей прямой *l*, на данную плоскость α (Δ*ABC*) (см. решение задач на рис. 15 и 16).

Задача 19. Определить натуральную величину расстояния между параллельными плоскостями α (ΔABC) и β ($m \cap n$) (рис. 19).

Решение. Расстояние измеряется длиной общего перпендикуляра. Следует взять точку на одной плоскости, например точку K в плоскости β ($m \cap n$), и определить расстояние от нее до другой плоскости α (ΔABC) (см. решение задач на рис. 15 и 16).

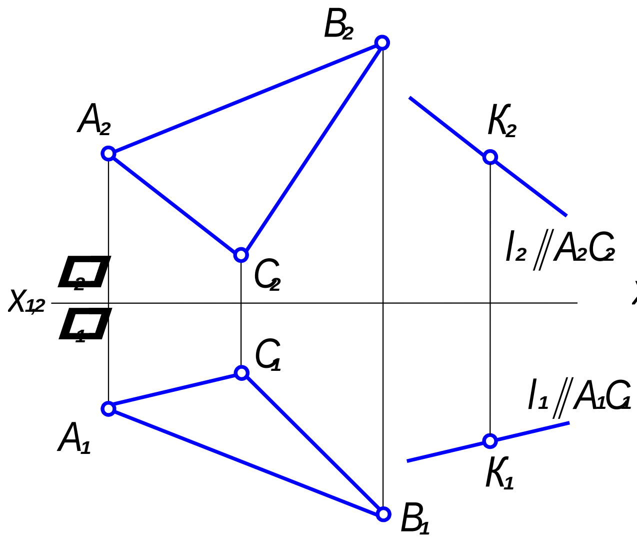


Рис. 18

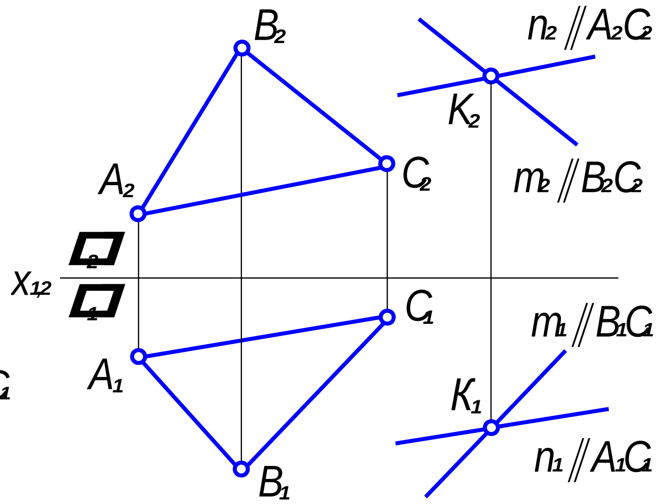


Рис. 19

6. НАТУРАЛЬНАЯ ВЕЛИЧИНА ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ И ЛИНЕЙНОГО УГЛА

В соответствии со свойствами ортогонального проецирования плоская фигура проецируется без искажения на параллельную ей плоскость проекций (рис. 20а, б). Линейный угол проецируется на плоскость проекций в натуральную величину, если стороны угла параллельны этой плоскости проекций (рис. 20а, б, в).

Следовательно, решение задачи на определение натуральной величины плоской фигуры или линейного угла сводится к преобразованию плоскости, в которой расположена плоская фигура или угол, в плоскость уровня.

Такая задача может быть решена:

- методом замены плоскостей проекций;
- методом вращения плоскости вокруг прямой уровня;
- методом плоскопараллельного перемещения.

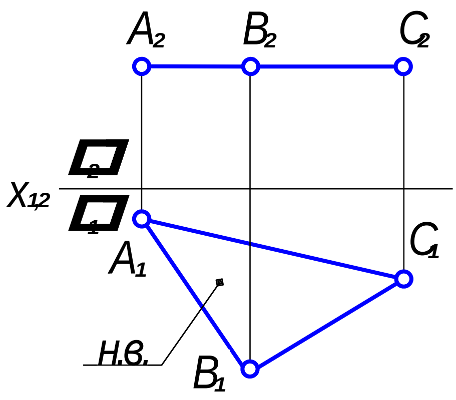


Рис. 20а

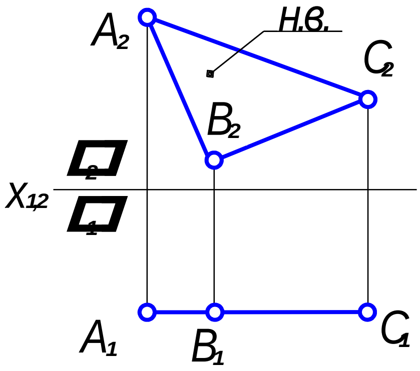


Рис. 20б

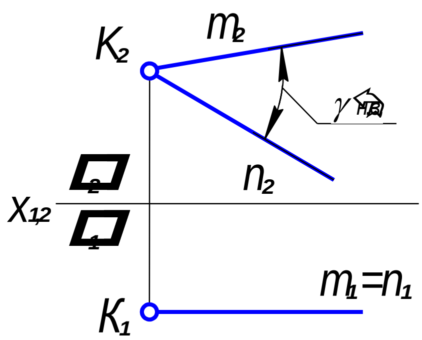


Рис. 20в

На рис. 21а треугольник *ABC* расположен в плоскости $\sigma \perp \pi_1$. Методом замены плоскостей проекций горизонтально проецирующая плоскость σ преобразована в плоскость уровня. В результате на плоскость проекций π_4 треугольник *ABC* и все углы при его вершинах проецируются без искажения.

Аналогичным способом решена задача на определение натуральной величины треугольника *ABC*, расположенного во фронтально проецирующей плоскости τ (рис. 21б).

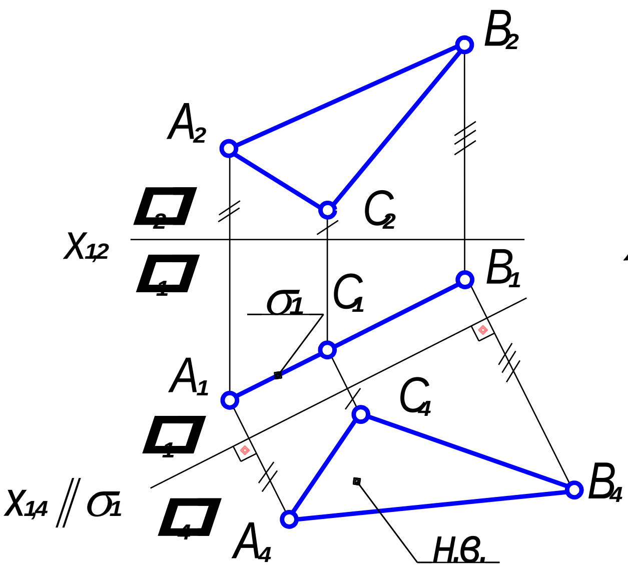


Рис. 21а

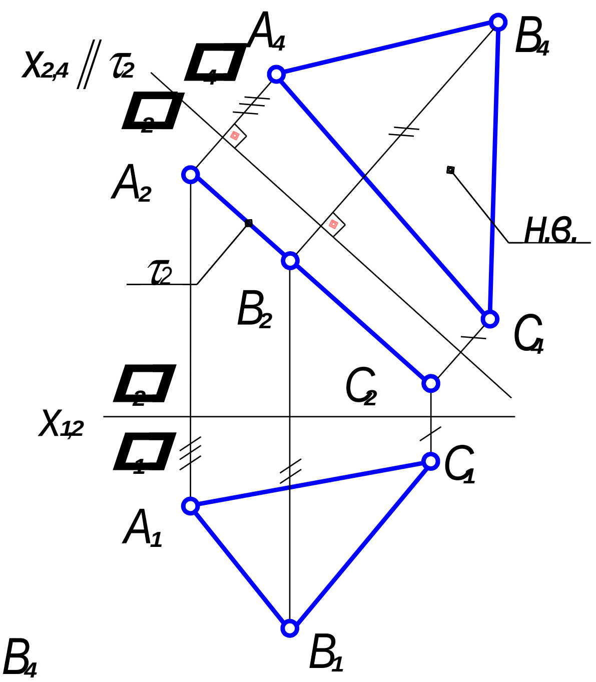


Рис. 21б

Если плоская фигура расположена в плоскости общего положения, то для решения задачи методом замены плоскостей проекций необходимо выполнить два преобразования плоскости: сначала преобразовать плоскость общего положения в проецирующую, затем в плоскость уровня (рис. 22а). Преобразование выполнено с помощью горизонтали: $\pi_1 / \pi_2 \rightarrow \pi_1 / \pi_4 \rightarrow \pi_4 / \pi_5$.

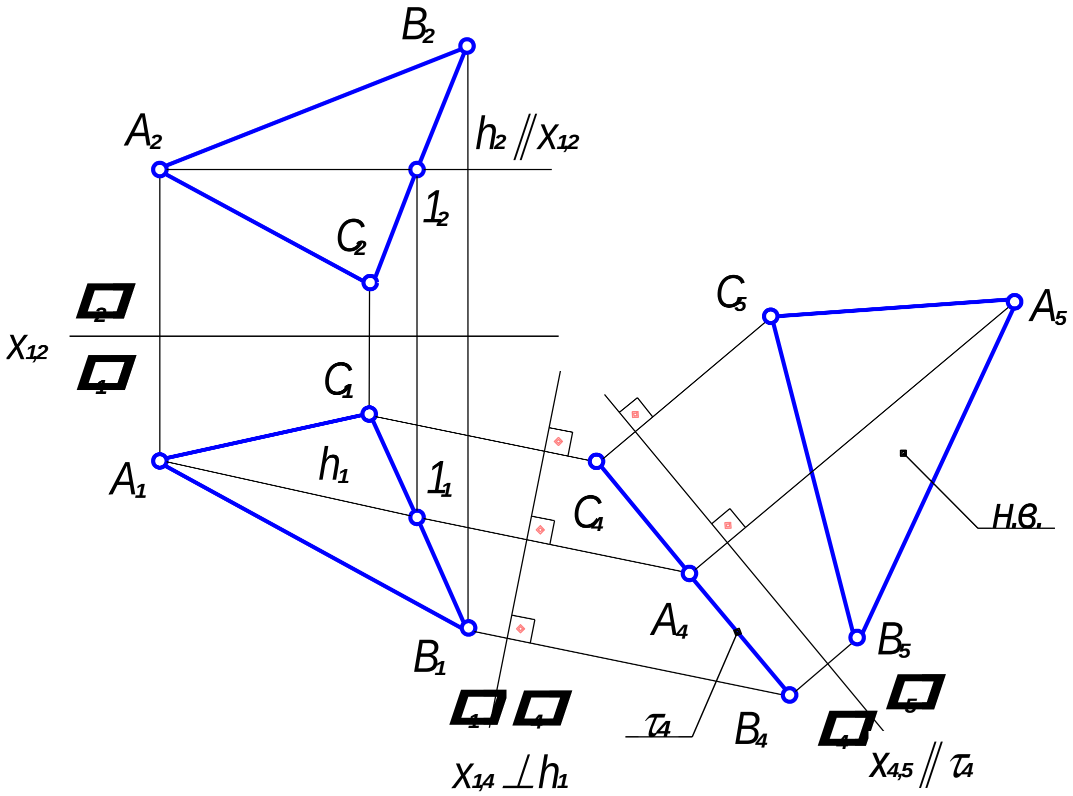


Рис. 22а

На рис. 22б натуральная величина треугольника *ABC*, расположенного в плоскости общего положения α, определена вращением вокруг горизонтали. При вращении вершина *A*, принадлежащая горизонтали, остается неподвижной. Вершины *B* и *C* вращаются в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

На рис. 22в та же задача решена методом плоскопараллельного перемещения. Сначала плоскость треугольника *ABC* преобразована в проецирующую, затем в плоскость уровня.

В плоскости α (Δ*ABC*) строим горизонталь *h*. Горизонтальную проекцию горизонтали h_1 располагаем перпендикулярно оси $x_{1,2}$. Сохраняя размеры и форму $\Delta\, A_1B_1C_1 = \Delta\, A'_1B'_1C'_1$, перемещаем Δ *ABC* в проецирующее положение. Проекцию $\Delta\, A'_2B'_2C'_2$ строим по линиям связи.

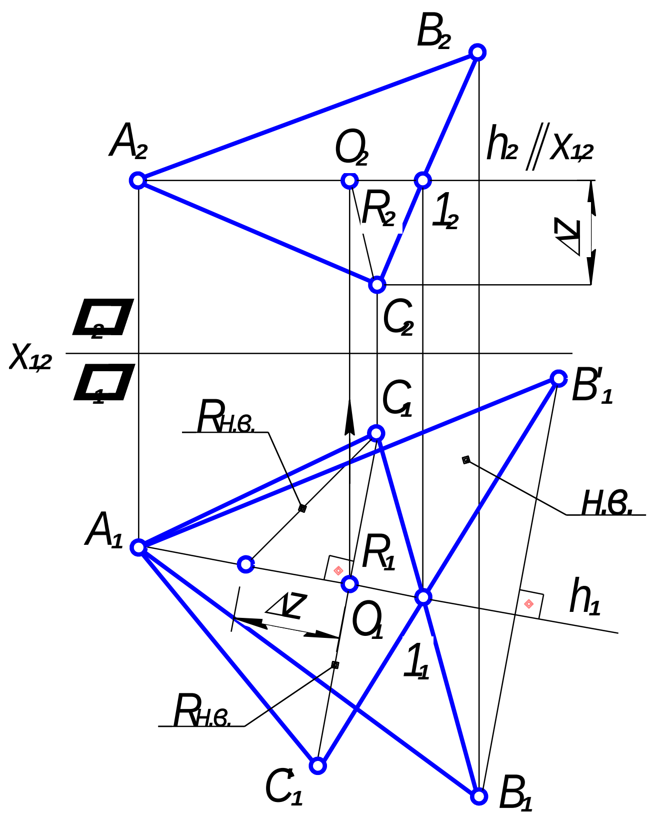


Рис. 22б

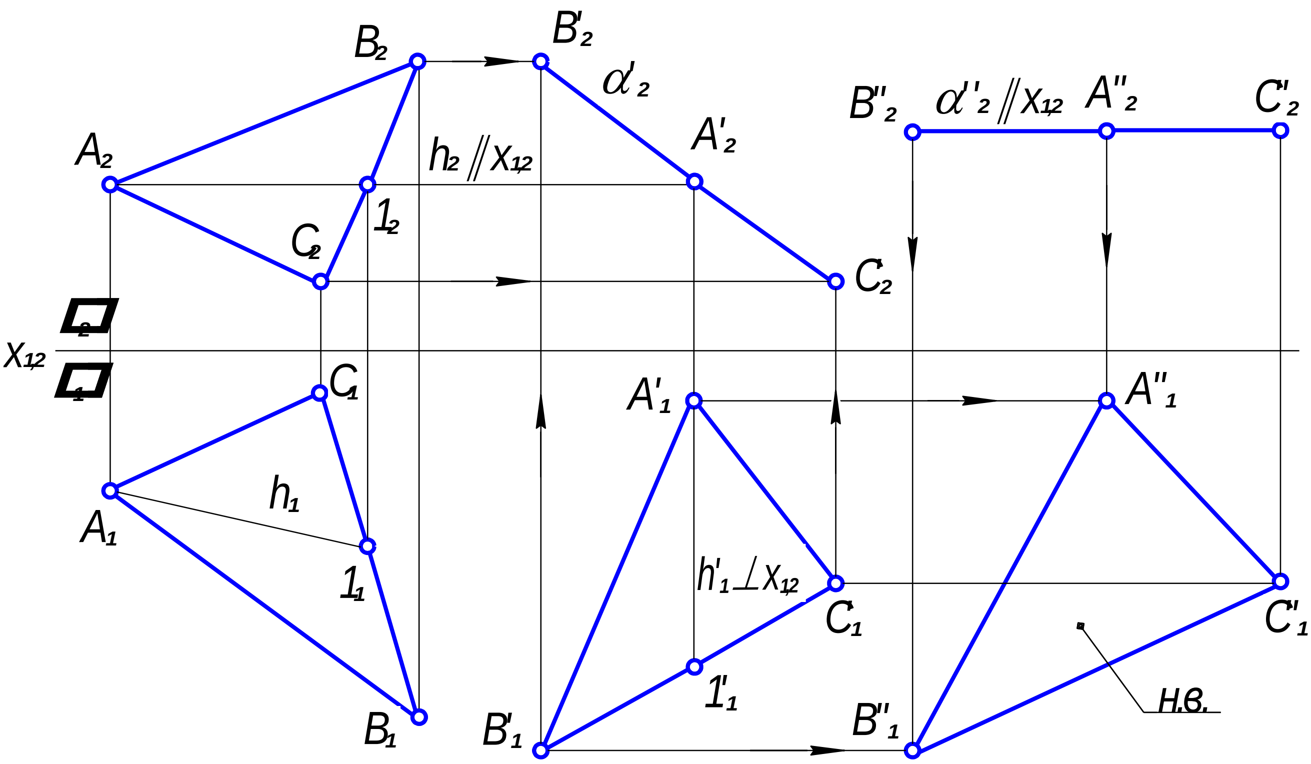


Рис. 22в

Затем располагаем $A''_2B''_2C''_2$ параллельно оси x, при этом сохраняя величину фронтальной проекции $A'_2B'_2C'_2 = A''_2B''_2C''_2$. По линиям связи получаем горизонтальную проекцию $\Delta\ A''_1B''_1C''_1$, которая передает натуральную величину $\Delta\ ABC$.

На рис. 23а методом замены плоскостей проекций решена задача на определение натуральной величины угла, заключенного между прямыми m и n, расположенными в плоскости общего положения τ. Преобразование выполнено с помощью фронтали: $\pi_1 / \pi_2 \rightarrow \pi_1 / \pi_4 \rightarrow \pi_4 / \pi_5$.

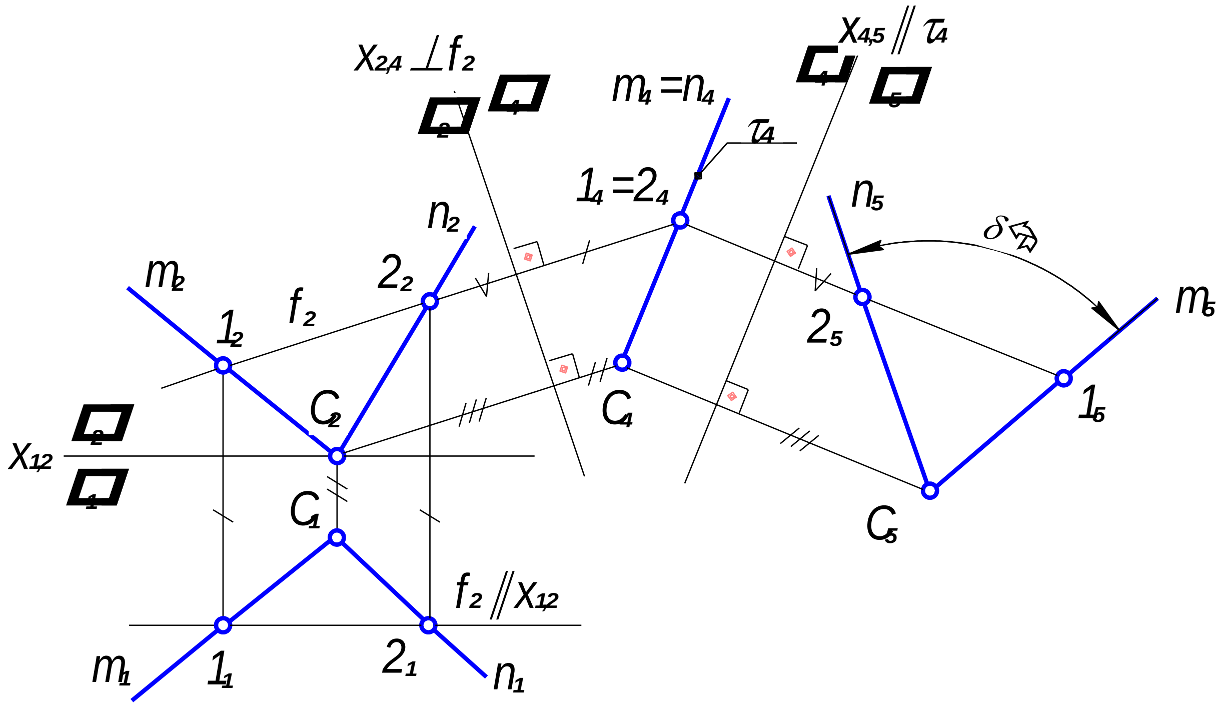


Рис. 23а

На рис. 23б показано решение задачи на определение натуральной величины угла, образованного пересекающимися прямыми m и n, методом вращения плоскости этого угла вокруг ее фронтали.

При выполнении преобразования (рис. 23б) положение точек *1* и *2*, принадлежащих фронтали, не изменится, а точка C будет вращаться по окружности радиуса $R = OC$. Находим центр вращения, для этого из C_2 опустили перпендикуляр к фронтали и отметили точку их пересечения – O_2, определили горизонтальную проекцию $O_1 \in f_1$. Величина радиуса на обе плоскости проекций проецируется с искажением, его натуральную величину

$R_{н.в.}$ определяем методом опорного (прямоугольного) треугольника. Затем вращаем C_2 вокруг фронтали до тех пор, пока плоскость угла не станет параллельна плоскости проекций, то есть до положения C'_2. Соединим ее с проекциями 1_2 и 2_2 прямых m и n, при этом угол δ проецируется в натуральную величину.

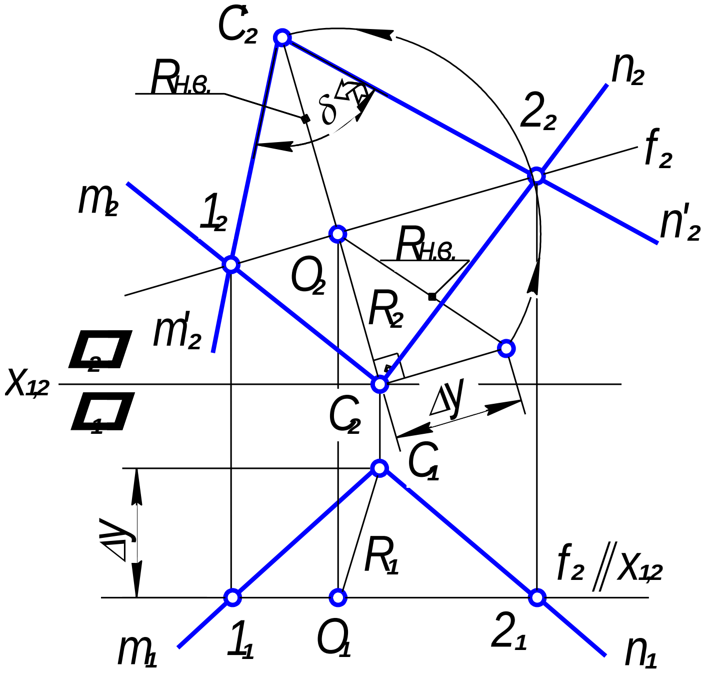


Рис. 23б

7. НАТУРАЛЬНАЯ ВЕЛИЧИНА ДВУГРАННОГО УГЛА

Мерой двугранного угла является его линейный угол, плоскость которого перпендикулярна ребру двугранного угла.

Следовательно, для определения натуральной величины двугранного угла необходимо преобразовать ребро этого угла в проецирующую прямую. В результате заданные плоскости также преобразуются в проецирующие. Искомый угол заключен между вырожденными проекциями этих плоскостей.

На рис. 24а, б решены задачи на определение натуральной величины двугранного угла при ребре AB, которое является прямой уровня. Одной заменой плоскостей проекций прямая AB преобразована в проецирующую. На плоскость проекций π_4 искомый угол проецируется без искажения.

Задача на определение двугранного угла при ребре AB, которое является прямой общего положения, решена на рис. 25. Двумя заменами плоскостей проекций прямая *AB* преобразована в проецирующую прямую. На плоскости проекций π_5 получаем натуральную величину угла.

Двугранный угол может быть образован также какой-либо плоскостью и плоскостью проекций. Для решения задачи на определение его натуральной величины необходимо преобразование заданной плоскости в проецирующую. Тогда линейный угол, являющийся мерой двугранного угла, будет заключен между вырожденной проекцией плоскости и соответствующей осью проекций, с которой будет совпадать вырожденная проекция интересующей нас плоскости проекций.

На рис. 12в, 12г, 13б, 14б, 15б, 16 углом $\gamma°$ обозначен линейный угол, являющийся мерой двугранного угла наклона заданной плоскости к плоскости проекций π_1, а углом $\varphi°$ – к плоскости проекций π_2. Если в системе плоскостей проекций π_1/π_2 рассматриваемая плоскость уже является проецирующей, то натуральную величину двугранного угла наклона ее к соответствующей плоскости проекций можно определить непосредственно с чертежа, не выполняя для этого никаких построений (рис. 12в, 12г).

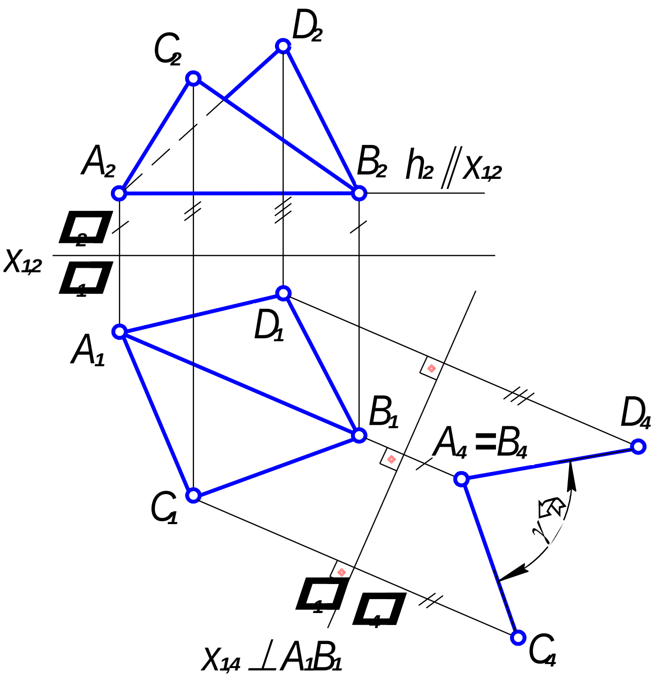


Рис. 24а

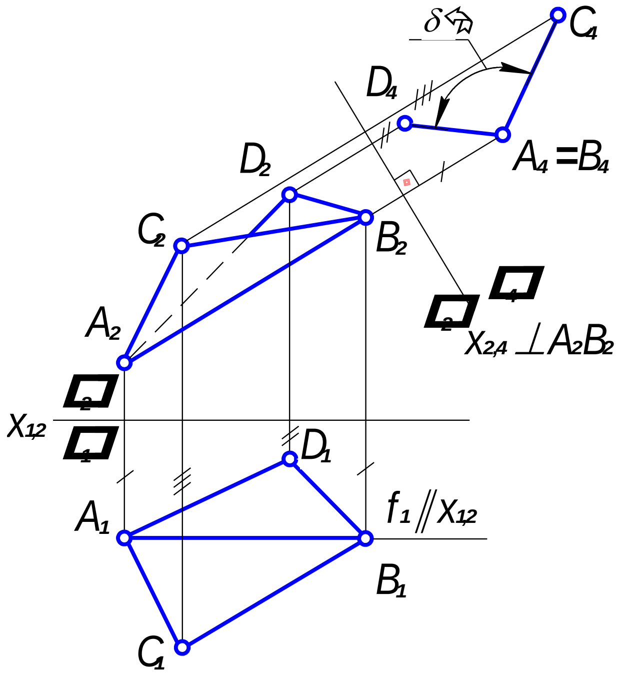


Рис. 24б

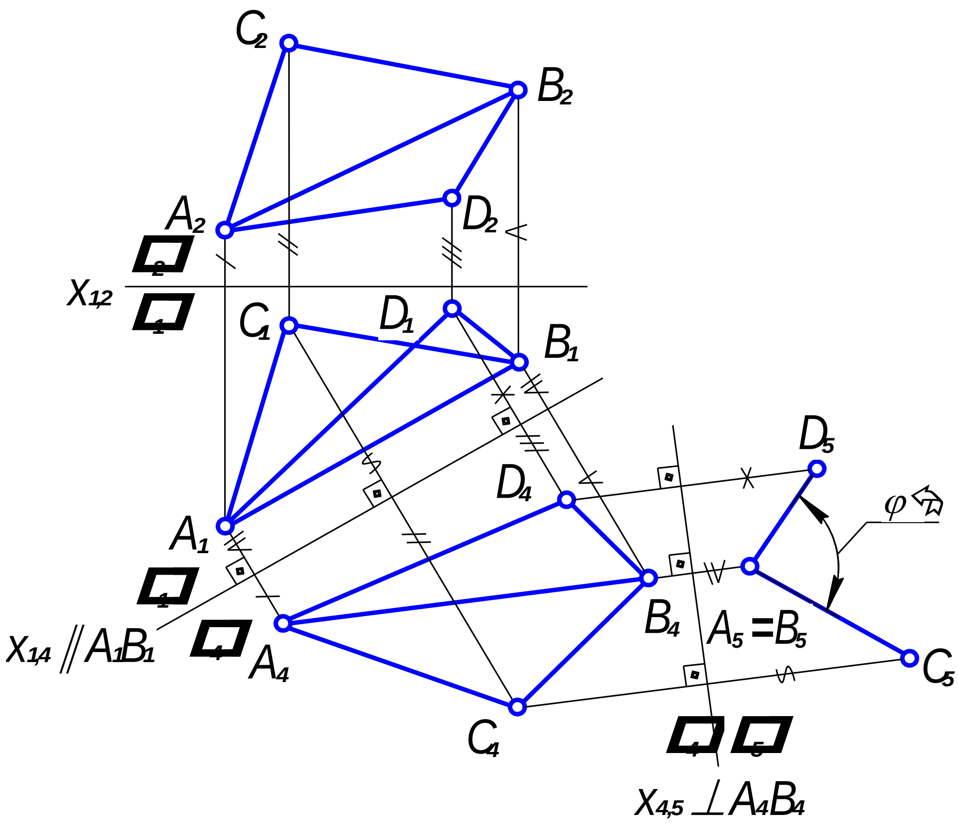

C2
B2
A2
D2
X1,2
C1
D1
B1
D5
D4
φ
A1
B4
A5 =B5
C5
X1,4 // A1B1
A4
C4
X4,5 ⊥ A4B4

Рис. 25

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ «МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ»

Цель работы

Закрепление умений и навыков по выполнению на комплексном чертеже следующих построений:

1) проекции точки, прямой, плоскости, многогранника;
2) взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей;
3) преобразования чертежа методами замены плоскостей проекций, вращения вокруг прямой, плоскопараллельного перемещения;
4) определения метрических характеристик геометрических фигур.

Объем и оформление работы

1. Работа выполняется на листе формата А3 (297×420 мм) (рис. 28 и 29).
2. Промежуточные вспомогательные построения выполняются сплошными тонкими линиями (оси проекций, линии проекционной связи, прямые уровня).
3. Все точки следует фиксировать маленькими окружностями (∅1,0…1,5 мм) и обязательно обозначать.
4. Обозначения располагать по горизонтали и выполнять чертежным шрифтом размера 5 в соответствии с ГОСТ 2.304-81.

Содержание и порядок выполнения работы

Дано: координаты четырех вершин *A, B, C* и *D* пирамиды (табл. 1).

Требуется: 1. Построить горизонтальные и фронтальные проекции вершин пирамиды *ABCD*.

2. Определить видимость ребер пирамиды.
3. Определить натуральную величину расстояния от заданной вершины до соответствующей грани пирамиды.
4. Определить натуральную величину грани пирамиды.
5. Определить натуральную величину двугранного угла при заданном ребре пирамиды.

Решение. 1. Пример построения фронтальной A_2 и горизонтальной A_1 проекций точки *A* дан на рис. 26. Аналогичным образом построим проекции вершин *B*, *C* и *D* пирамиды. Одноименные проекции вершин пирамиды соединяем попарно прямыми линиями.

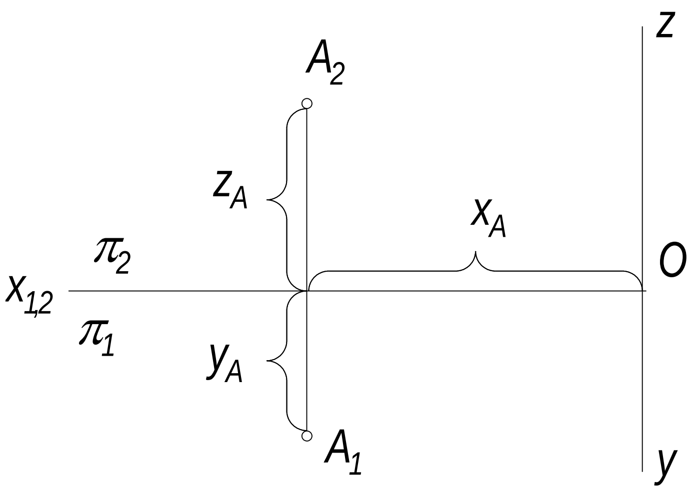


Рис. 26

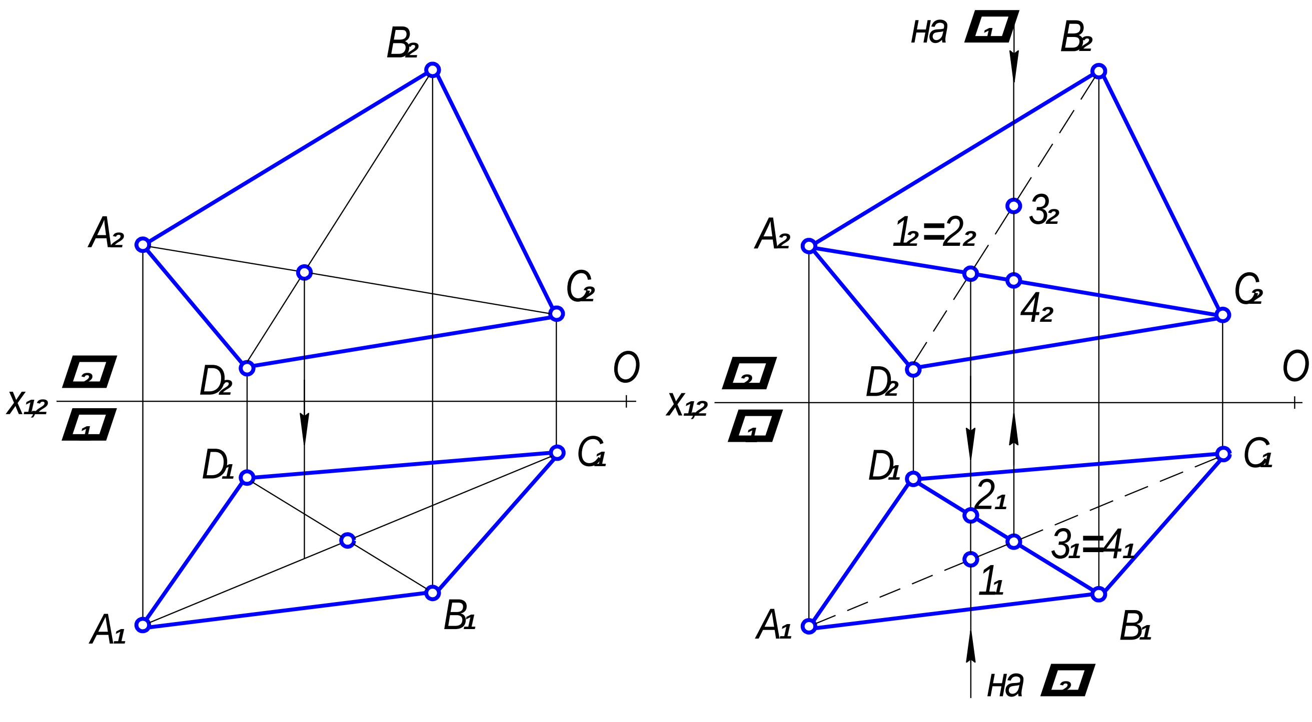
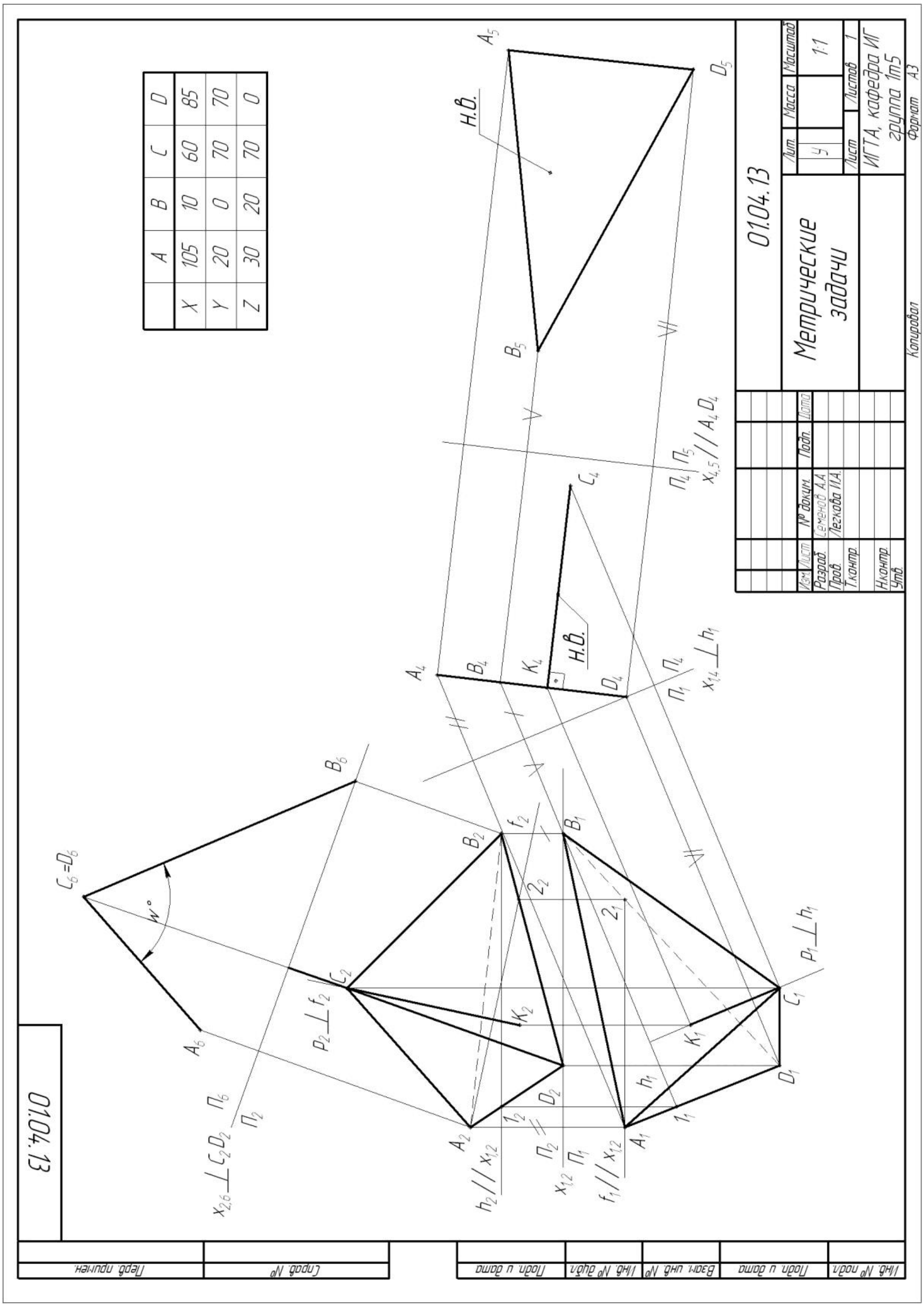


Рис. 27а Рис.27б

2. Пусть в результате выполненных построений получены фронтальная и горизонтальная проекции пирамиды *ABCD*, изображенные на рис. 27а. Крайние ребра определяют очертание пирамиды на соответствующей плоскости проекций и безусловно видимы. Видимость ребер *AC* и *BD* следует определить методом конкурирующих точек.

Для решения вопроса о видимости ребер пирамиды на фронтальной плоскости проекций отмечаем пару фронтально конкурирующих точек *1* и *2*, принадлежащих ребрам *AC* и *BD*. Их фронтальные проекции совпадают ($1_2 = 2_2$) и определяются взаимным пересечением A_2C_2 и B_2D_2, а горизонтальные ($1_1 \in B_1D_1$, $2_1 \in A_1C_1$) позволяют установить, что точка *1* расположена дальше от плоскости проекций π_2, чем точка *2*. Следовательно, на фронтальной плоскости проекций ребро *BD* видимо, а ребро *AC* невидимо. Подобным образом устанавливаем видимость ребер пирамиды на горизонтальной плоскости проекций: из двух горизонтально конкурирующих точек *3* и *4* ($3 \in AC$, $4 \in BD$) выше расположена точка *3*. Следовательно, на горизонтальной плоскости проекций π_1 ребро *AC* видимо, а ребро *BD* невидимо (рис. 27б).

3. Для ***технологов*** всех специальностей метрические задачи № 3, 4 и 5 решаются с использованием метода замены плоскостей проекций (рис. 28). Для ***механиков*** третья задача (определение расстояния от вершины до грани) решается методом плоскопараллельного перемещения, четвертая (определение натуральной величины грани пирамиды) – вращением вокруг прямой уровня, пятая (определение натуральной величины двугранного угла) – заменой плоскостей проекций (рис. 29).



01.04.13
Метрические задачи
ИГТА, кафедра ИГ
группа 1т5
Разраб. Семенов А.А.
Пров. Легкова И.А.
Н.В.
	A	B	C	D
X	105	10	60	85
Y	20	0	70	70
Z	30	20	70	0

Рис. 28

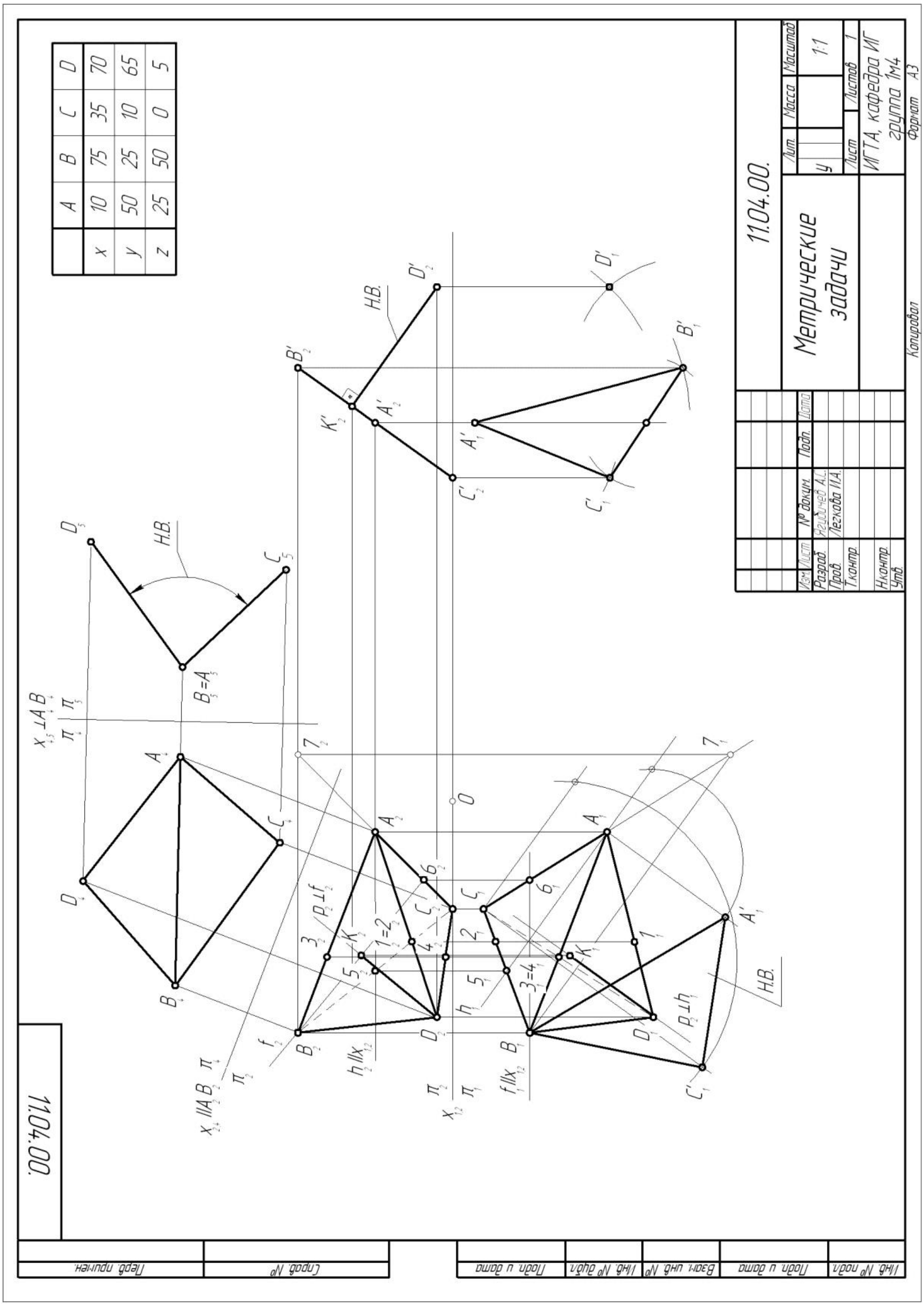

A B C D
x 10 75 35 70
y 50 25 10 65
z 25 50 0 5
11.04.00.
Метрические задачи
Лит Масса Масштаб
у
1:1
Лист Листов 1
ИГТА, кафедра ИГ группа 1м4
Формат А3
Копировал
Изм Лист № докум. Подп. Дата
Разраб. Нгибичев А.Ц.
Пров. Легкова И.А.
Т.контр.
Н.контр.
Утв.
Н.В.
Перв. примен.
Справ. №
Подп. и дата
Инв. № дубл.
Взам. инв. №
Подп. и дата
Инв. № подл.

Рис. 29

Таблица 1

№ варианта	Координаты вершин пирамиды					Определить натуральную величину			
						расстояния		треугольника	двугранного угла при ребре
		A	*B*	*C*	*D*	от вершины	до грани		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	x	75	35	10	70	*D*	*ABC*	*ABC*	*AB*
	y	25	10	50	60				
	z	50	0	25	0				
2	x	75	35	10	60	*D*	*ABC*	*ABC*	*AB*
	y	40	30	65	70				
	z	0	50	25	55				
3	x	75	70	5	45	*A*	*BCD*	*BCD*	*CD*
	y	55	0	10	55				
	z	65	20	50	5				
4	x	35	65	60	5	*B*	*ACD*	*ACD*	*AD*
	y	40	50	0	10				
	z	60	15	35	15				
5	x	45	0	60	75	*D*	*ABC*	*ABC*	*AC*
	y	60	20	30	25				
	z	20	10	65	20				
6	x	20	55	80	10	*A*	*BCD*	*BCD*	*CD*
	y	45	10	60	10				
	z	50	50	0	20				
7	x	10	55	80	20	*D*	*ABC*	*ABC*	*BD*
	y	20	65	0	5				
	z	10	10	60	75				
8	x	95	5	55	85	*D*	*ABC*	*ABC*	*CD*
	y	30	10	70	20				
	z	0	20	60	60				
9	x	45	5	70	60	*D*	*ABC*	*ABC*	*BD*
	y	55	10	0	40				
	z	0	45	30	55				
10	x	75	30	10	60	*B*	*ACD*	*ACD*	*BD*
	y	0	50	20	50				
	z	25	15	50	65				
11	x	80	40	15	65	*A*	*BCD*	*BCD*	*AC*
	y	25	10	55	70				
	z	50	0	20	10				
12	x	60	45	5	75	*D*	*ABC*	*ABC*	*AC*
	y	20	60	20	10				
	z	65	10	10	25				
13	x	105	10	60	85	*C*	*ABD*	*ABD*	*CD*
	y	20	0	70	70				
	z	30	20	70	0				
14	x	50	10	75	80	*D*	*ABC*	*ABC*	*BD*
	y	60	15	5	50				
	z	10	55	25	70				

Окончание табл. 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
15	x	65	50	10	70	*D*	*ABC*	*ABC*	*AB*
	y	25	65	25	15				
	z	65	10	10	25				
16	x	90	60	30	10	*C*	*ABD*	*ABD*	*AB*
	y	10	70	20	40				
	z	70	10	80	30				
17	x	10	75	35	70	*D*	*ABC*	*ABC*	*BD*
	y	50	25	10	60				
	z	25	50	0	5				
18	x	10	35	75	60	*D*	*ABC*	*ABC*	*BD*
	y	65	30	40	70				
	z	25	50	0	55				
19	x	75	70	45	5	*A*	*BCD*	*BCD*	*BD*
	y	55	0	55	10				
	z	65	20	5	50				
20	x	5	65	60	35	*B*	*ACD*	*ACD*	*CD*
	y	10	50	0	40				
	z	15	15	35	60				
21	x	45	0	75	60	*C*	*ABD*	*ABD*	*AD*
	y	60	20	25	30				
	z	20	10	20	65				
22	x	10	55	80	20	*D*	*ABC*	*ABC*	*AB*
	y	10	10	60	45				
	z	20	50	0	50				
23	x	10	20	80	55	*B*	*ACD*	*ACD*	*AB*
	y	20	5	0	65				
	z	10	75	60	10				
24	x	85	5	55	95	*A*	*BCD*	*BCD*	*AC*
	y	20	10	70	30				
	z	60	20	60	0				
25	x	45	5	60	70	*C*	*ABD*	*ABD*	*BC*
	y	55	10	40	0				
	z	0	45	55	30				
26	x	60	30	10	75	*B*	*ACD*	*ACD*	*AB*
	y	50	50	20	0				
	z	65	15	50	25				
27	x	65	40	15	80	*D*	*ABC*	*ABC*	*CD*
	y	70	10	55	25				
	z	10	0	20	50				
28	x	60	45	75	5	*C*	*ABD*	*ABD*	*AD*
	y	20	60	10	20				
	z	65	10	25	10				
29	x	105	60	10	85	*B*	*ACD*	*ACD*	*BD*
	y	20	70	0	70				
	z	30	70	20	0				
30	x	80	10	75	50	*A*	*BCD*	*BCD*	*AB*
	y	50	15	5	60				
	z	70	55	25	10				

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гордон, В.О. Курс начертательной геометрии / В.О. Гордон, М.А. Семенцов-Огиевский. – М.: Высшая школа, 2003.

2. Локтев, О.В. Краткий курс начертательной геометрии / О.В. Локтев. – М.: Высшая школа, 1999.

3. Крылов, Н.Н. Начертательная геометрия / Н.Н. Крылов. – М.: Высшая школа, 2000.

4. Чекмарев, А.А. Инженерная графика / А.А. Чекмарев. – М.: Высшая школа, 1988.

5. Чекмарев, А.А. Начертательная геометрия и черчение/ А.А. Чекмарев. – М.: Юрайт, 2011.

6. Лазариди, К.Х. Начертательная геометрия / К.Х. Лазариди. – М.: Росвузнаука, 1990.

МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Методические указания
к выполнению графической работы
для студентов всех специальностей

Составители: Юрий Михайлович Максимовский
Ирина Анатольевна Легкова
Татьяна Николаевна Фомичева

Научный редактор Е.Н. Никифорова
Редактор И.Н. Худякова
Корректор К.А. Торопова

Подписано в печать 07.09.2011.
Формат 1/8 60× 84. Бумага писчая. Плоская печать.
Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 2,2. Тираж 100 экз. Заказ № _______

Редакционно-издательский отдел
Ивановской государственной текстильной академии
Копировально-множительное бюро
153000 г. Иваново, пр. Ф. Энгельса, 21